Document d'accompagnement thématique

MINISTÈRE DE L'AGRICULTURE ET DE L'ALIMENTATION
Liberté
Égalité
Fraternité

Inspection de l'Enseignement Agricole

Mise à jour janvier 2023 : correctifs dans les enseignements visant les capacités C62 et C63.

Diplôme:
BTSA Qualité, alimentation, innovation et maîtrise sanitaire - BIOQUALIM

Thème :
Exemples d'utilisation des mathématiques dans des situations favorisant l'acquisition de capacités

Commentaires, recommandations pédagogiques,

L'enseignement des mathématiques contribue, notamment en lien avec les disciplines professionnelles, à l'acquisition des capacités :

C5.2 – Concevoir un produit répondant aux attentes internes et externes.

C6.1 – Concevoir un plan de contrôle.

C6.2 – Mettre en œuvre des techniques d'analyse nécessaires au contrôle qualité.

C6.3 – Contrôler les performances techniques de la ligne de production.

L'enseignant veille à s'appuyer sur les acquis des apprenants pour développer de nouveaux outils mathématiques principalement dans le but de répondre à des problématiques professionnelles. La mobilisation de ces outils dans le cadre de la résolution de problèmes concourt à l'obtention des capacités professionnelles susvisées. Cela donne du sens, puis montre l'importance de mobiliser de nouveaux outils mathématiques au service de l'acquisition des capacités professionnelles.

L'enseignement des mathématiques est intégratif. Le lien avec ce qui est fait dans les disciplines professionnelles est un appui qui permet d'ancrer durablement les apprentissages. Les contextes doivent varier en fonction des situations techniques et provenir de documents issus de sources multiples : l'ANSES, l'OMS, la HAS, le CNRS, l'INRA, l'IFREMER, l'INC, les normes ISO, l'INSEE, AGRESTE…, données issues de l'exploitation ou de l'atelier technologique de l'établissement, documentations, résultats issus de projets (dossier expérimental du bloc 8 de compétences, le stage en milieu professionnel, les projets éventuels avec des partenaires privés ou publics…).

La progression construite par le professeur de mathématiques doit être en lien direct avec celle proposée par les collègues de disciplines professionnelles.

La résolution de problèmes demande de mobiliser des techniques calculatoires. Les calculs, pour une grande partie, peuvent être délégués à un outil de calcul numérique (calculatrice, tableur, logiciel de calcul, …). Il ne s'agit pas ici de développer une virtuosité technique mais plutôt de se positionner comme observateur et de se questionner sur les processus mis en œuvre dans le domaine professionnel. La recherche de réponses amènera naturellement à élaborer des démarches, mener des calculs à l'aide d'un outil adapté, s'assurer de la cohérence de résultats et prendre des décisions.

L'institutionnalisation des notions, phase indispensable dans le processus d'apprentissage, a pour but d'expliciter les savoirs et les savoir-faire, de donner des repères simples aux apprenants. Ce temps doit être court et synthétique. Les développements théoriques sont réduits à l'essentiel et toujours présentés dans un cadre simple.

Des mathématiques transversales à tous les blocs de compétences.

L'acquisition des capacités professionnelles demande d'aborder de nouvelles notions qui s'appuient de façon implicite sur des connaissances mathématiques vues dans les classes antérieures du collège et du lycée. Certaines difficultés d'apprentissage de ces nouveaux concepts proviennent d'un manque de maîtrise de ces prérequis. Il est indispensable d'y consacrer régulièrement du temps afin de réactiver et consolider ces savoirs sans entrer dans un schéma de révision. Le choix de réinvestir les notions transversales suivantes est décidé en fonction de la progression choisie :

- Proportion, pourcentage, proportionnalité, rendement, concentration, densité, ...
- Sens des opérations, application de formules, résolution d'une équation à une inconnue ou deux équations à deux inconnues, changement d'échelle ou d'unité, représentation graphique de fonctions et exploitation graphique.
- Fonctions affines, puissances, logarithmes népérien et décimal, exponentielles. Calcul de pente, de nombre dérivé, de vitesses moyenne et instantanée, d'aires.
- Représentations de diagrammes statistiques pertinents, interprétation et utilisation d'indicateurs statistiques.
- Probabilités élémentaires, lien entre fréquences et probabilités, arbres de probabilités.

Afin que les apprenants soient aguerris aux pratiques calculatoires élémentaires favorisant l'acquisition des capacités, des automatismes mathématiques doivent être développés par un travail régulier, afin d'obtenir une aisance suffisante. La pratique de l'ensemble de ces items doit être très régulière, principalement sur des situations en lien avec les disciplines professionnelles.

Au-delà d'une pratique dans toutes les activités de la classe, il est aussi important d'entretenir ces automatismes par des rituels de début de séance, très régulièrement sur l'ensemble des deux années, sous forme de « questions flash » privilégiant l'activité mentale avec un recours à des connaissances, des procédures, des méthodes et des stratégies fondamentales dans la pratique professionnelle. Cela ne doit pas faire l'objet d'un chapitre d'enseignement spécifique car les notions qui les sous-tendent ont été travaillées dans les classes antérieures. Cette pratique, propre à chaque enseignant, doit s'adapter aux besoins du diplôme.

Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs mais donnent une orientation de ce qui peut être fait.

Parmi eux, certains doivent être propices au calcul mental.

- Sens des opérations qui permet d'effectuer des calculs courants.
- Calculer une moyenne, une moyenne pondérée.

- Passer d'une proportion (1/2, 3/4, 1/5, …) à un pourcentage (50%, 75%, 20%, …) et inversement.
- Calcul de pourcentages, calcul de prix TTC à partir d'un prix HT et inversement, avec des taux de TVA différents.
- Lier augmentation et diminution en pourcentage avec coefficient multiplicateur et les utiliser en situation.
- Comparer en situation des proportions et des pourcentages.
- Application de formules et détermination de la valeur numérique d'une grandeur connaissant les autres.
- Calculs géométriques élémentaires s'appuyant sur les objets géométriques élémentaires : rectangle, carré, triangle, cube, pavé, cylindre.
- Conversions de mesures et capacités usuelles (cm^3 en L, ha en km^2, …)
- Reconnaitre graphiquement des fonctions de référence, en décrire les variations et les extremums.
- Choisir une représentation graphique adaptée pour représenter des données, des proportions ou des pourcentages (graphique, diagramme circulaire, semi-circulaire, diagramme en bâton ou en barres, barres empilées, …).
- Inversement, interpréter des diagrammes et retrouver des données statistiques à partir de représentations.

Les outils numériques doivent être intégrés à l'enseignement des mathématiques. Ils apportent une plus-value permettant d'aborder de véritables problèmes issus des disciplines professionnelles. L'usage des outils numériques tels que le tableur, les logiciels de traitement de données statistiques, de sondage, de cartographie, … doit être pensé dans l'optique de résoudre des problèmes qui n'auraient pas été accessibles sans. La maîtrise de ces outils numériques n'est pas un but de l'enseignement des mathématiques. La calculatrice reste aussi un outil facilement mobilisable en classe. Cela n'est pas contradictoire avec une pratique du calcul mental régulière mais raisonnée, tant par la difficulté des questions posées que le contexte de sa pratique.

Intentions majeures du référentiel de mathématiques.

L'enseignement de mathématiques intervient essentiellement dans le cadre de deux blocs de compétences :
- le bloc 5 qui contribue à l'élaboration de nouveaux produits. L'apprenant doit être capable de mettre en place un test d'indépendance et mener une analyse sensorielle sur un nouveau produit ou une innovation technologique ;

- le bloc 6 vise à développer la mise en œuvre de raisonnements et acquérir des méthodes de contrôle et d'analyse, qui permettent d'assurer la qualité du produit fini. L'apprenant doit être capable de modéliser une situation, établir une estimation d'un paramètre en vue d'une prise de décision dans un cadre professionnel et mettre en place et interpréter des tests statistiques simples.

L'enseignement de mathématiques forme un ensemble. Il n'est donc pas possible de le décomposer clairement capacité par capacité ou de proposer un découpage chronologique unique qui suivrait, par exemple, la numérotation des capacités. Ce référentiel est conçu pour que les connaissances mises en œuvre soient utilisées pendant l'ensemble de la formation, à l'intérieur de la discipline mais surtout au service d'une réflexion globale en équipe pédagogique et, le plus souvent possible, dans un contexte professionnel. On développe donc l'aptitude des apprenants à mobiliser des compétences de mathématiques en situation professionnelle. En revanche, ce document précise les situations d'évaluation auxquelles les mathématiques peuvent être associées. Cette évaluation ne couvre pas forcément de façon exhaustive la totalité des items cités et doit plutôt répondre de façon intégrative à la capacité intermédiaire visée. Enfin, les points abordés ont vocation à être mobilisés dans chaque sous-capacité du bloc de compétence où ils sont nécessaires.

C5.2 Concevoir un produit répondant aux attentes internes et externes

On attend de l'apprenant qu'il mobilise des outils mathématiques adaptés pour mener une analyse sensorielle. Les outils numériques sont utilisés à cette fin.

Mobilisation de l'outil mathématique

- Mise en place d'automatismes (ou de rituels).
- Mise en œuvre d'un test d'indépendance.
- Interprétation des résultats d'une analyse sensorielle.

- **Mise en œuvre d'un test d'indépendance.**

L'apprenant doit être en mesure de mettre en place un test d'indépendance de deux caractères qualitatifs, le test d'indépendance du χ^2.

La mise en place de ce test est aussi l'occasion d'étudier quelques propriétés d'un couple de variables aléatoires discrètes afin de reconnaître une situation de dépendance ou d'indépendance (somme de deux variables, espérance, et variance dans le cas où les variables sont indépendantes). Il est essentiel de développer d'abord la compréhension de la situation à partir de simulations. L'étude porte, si possible, sur des données issues d'un travail collaboratif avec l'équipe pédagogique intervenant dans les enseignements professionnels. On s'assure que les hypothèses permettant l'application du test sont réalisées.

Exemple : Introduire le test d'indépendance du χ^2.

Une société spécialisée dans la fabrication de produits de viennoiserie souhaite diversifier sa gamme de brioches. La direction envisage de fabriquer de nouveaux produits et organise une dégustation auprès d'un testeur semi-naïf à partir de 144 recettes. Trois levains ont été élaborés à partir de protocoles différents (farine complète de seigle, de froment ou d'épeautre) et on veut étudier l'influence du levain sur le caractère acidulé de la brioche. Le tableau suivant présente le croisement de deux variables, l'évaluation du caractère acidulé de la brioche et la catégorie de farine utilisée. L'utilisation du logiciel R ou d'un tableur en installant un utilitaire d'analyse facilite grandement les calculs. L'utilisation d'une calculatrice reste possible.

Caractère acidulé de la brioche / Type de levain	Faible	Moyen	Fort	Total
Seigle	8	15	19	42
Froment	33	17	5	55
Épeautre	15	31	1	47
Total	56	63	25	144

Le tableau ci-dessus peut être saisi dans R via l'instruction

```
>tableau=data.frame(faible=c(8,33,15),moyen=c(15,17,31),fort=c(19,5,1),
row.names=c('levain de seigle','levain de froment','levain d'épeautre'))
```

Dans le cas où les variables seraient indépendantes, on s'attend à obtenir le tableau des effectifs suivants.

Caractère acidulé de la brioche / Type de levain	Faible	Moyen	Fort	Total
Seigle	16.33333	18.3750	7.291667	42
Froment	21.38889	24.0625	9.548611	55
Épeautre	18.27778	20.5625	8.159722	47
Total	56	63	25	144

Celui-ci s'obtient en récupérant le résultat du test dans une variable que l'on va nommer khi puis l'affichage des effectifs attendus.

```
>khi=chisq.test(tableau)
>khi$expected
```

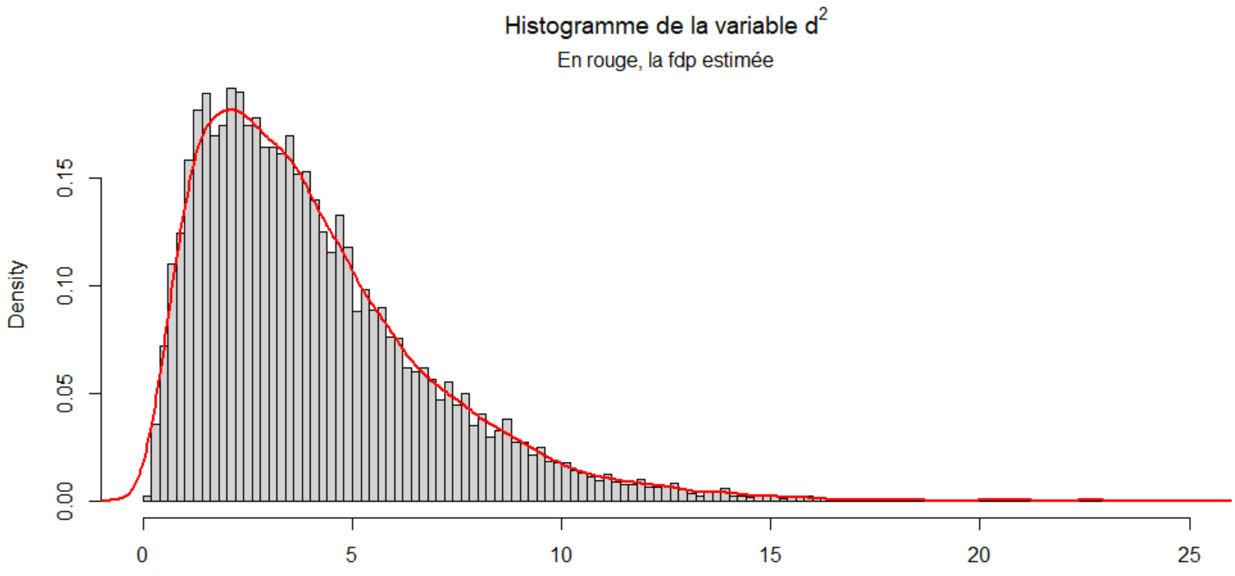
Dans le cas de l'indépendance « parfaite », le tableau des effectifs attendus devrait être identique au tableau des effectifs observés. La mesure de l'indépendance amène donc à mesurer l'écart existant entre les deux tableaux via la formule :

$$d^2 = \sum_{i,j} \frac{\left(O_{i,j} - E_{i,j}\right)^2}{E_{i,j}}$$

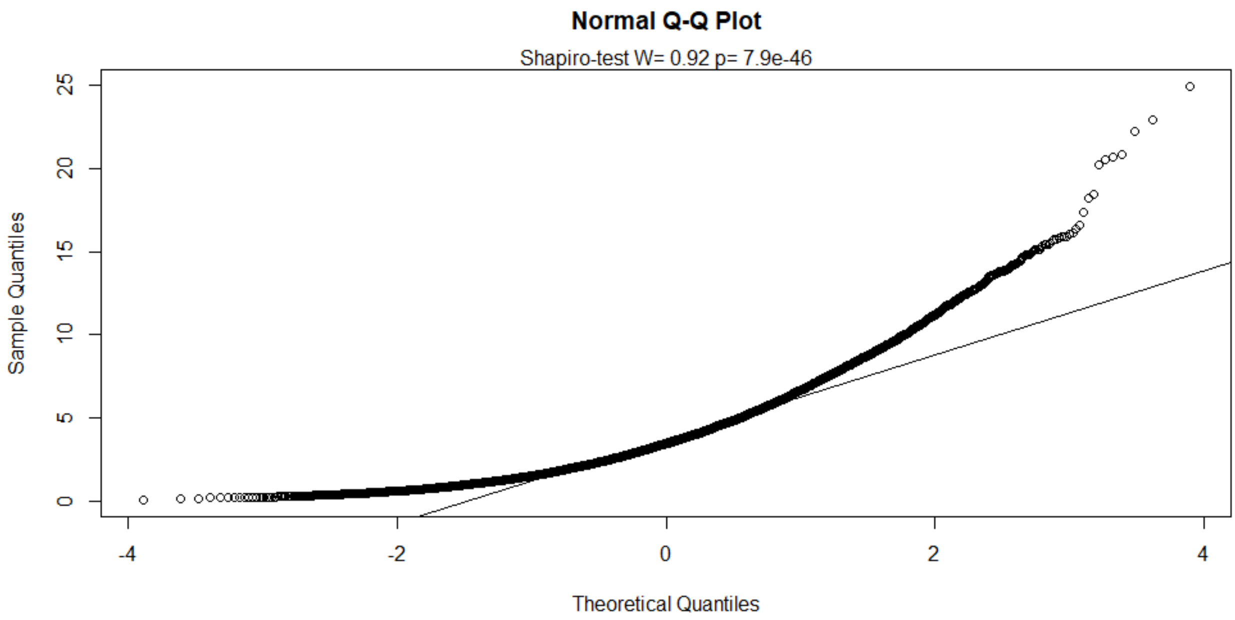
où les $O_{i,j}$ correspondent aux effectifs observés et les $E_{i,j}$ aux effectifs attendus sous l'hypothèse d'indépendance.
Pour obtenir une idée de la distribution de la variable d^2, on simule des tableaux dont les lignes et les colonnes sont indépendantes et ayant les mêmes marges que le tableau initial. Ce type de simulation étant difficile à mettre en œuvre, on peut plutôt pour faire émerger la loi du χ^2 s'intéresser à l'adéquation à une loi. (cf annexe1). Pour les plus curieux, on peut consulter l'algorithme RCont dû à Boyett[1] sur la génération des tableaux de contingence de marges en ligne et en colonne fixées.
Les lignes de commande ci-dessous permettent d'obtenir l'histogramme où la variable informatique d contient la valeur observée de d^2 pour 5000 simulations de tableaux, ainsi que la fonction de densité de probabilité estimée.

```
>hist(d,breaks=100,prob=T)
>lines(density(d),col='red',lwd=2)
```

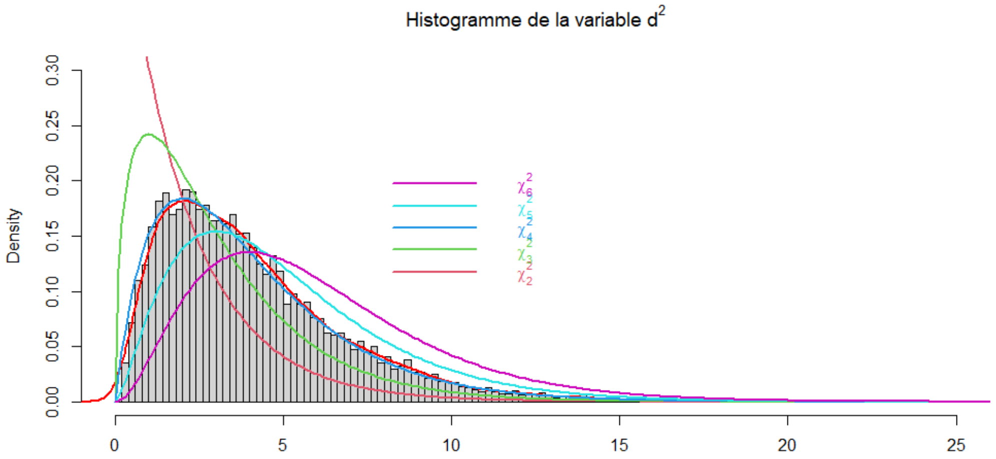
[1] James M. Boyett *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)* Vol. 28, No. 3 (1979), pp. 329-332



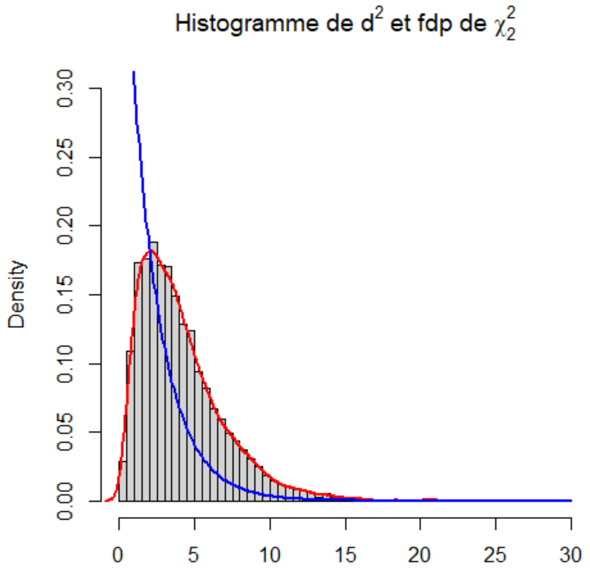
Dans un premier temps, nous recherchons l'adéquation à une loi normale avec les commandes qqnorm(d), qqline(d) et shapiro.test(d)

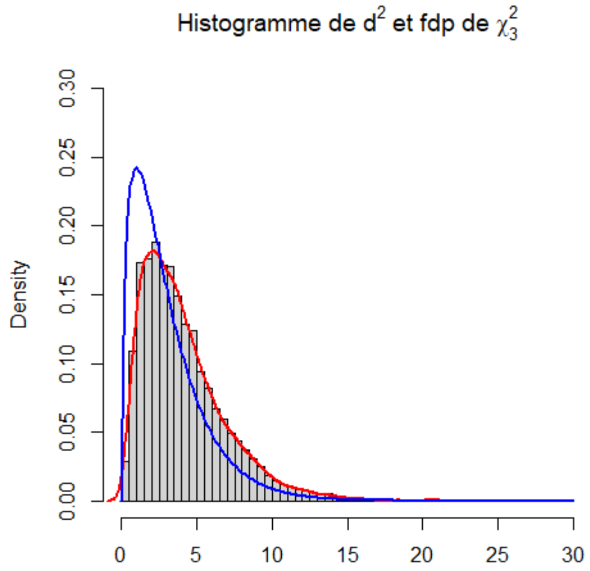


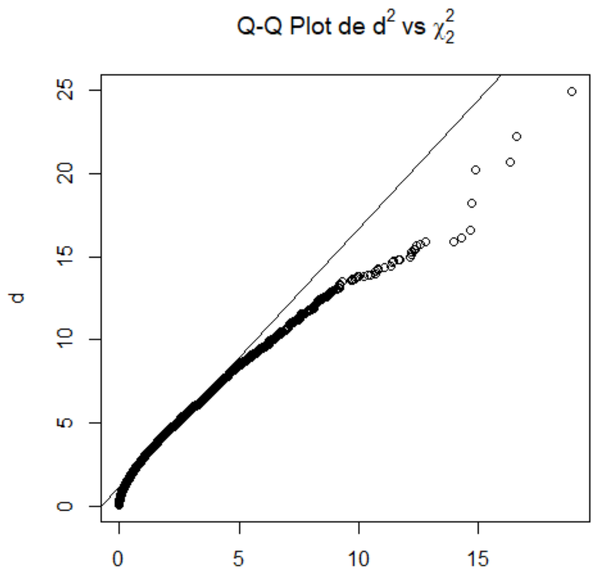
On rejette donc la normalité, ce qui amène à chercher une loi approchant d^2.
La forme de l'histogramme incite à essayer une loi du Khi2 avec un certain degré de liberté.

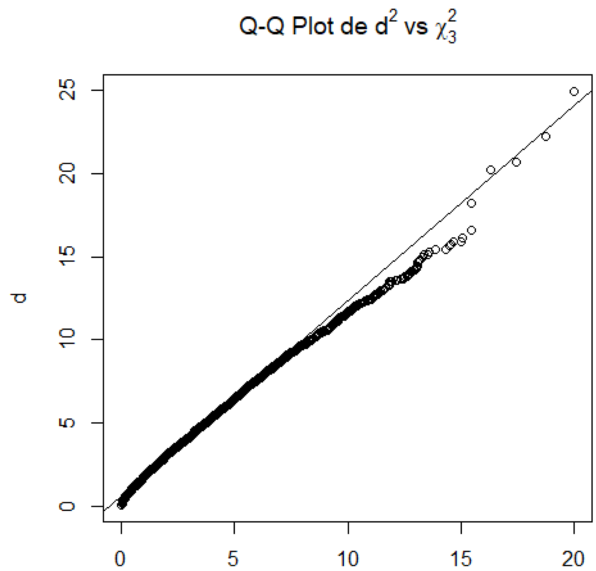


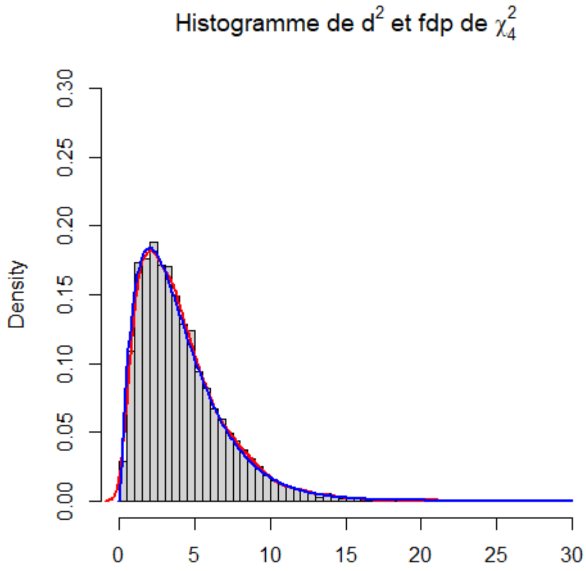
Étudions alors l'adéquation aux différentes lois du χ^2, cas par cas.

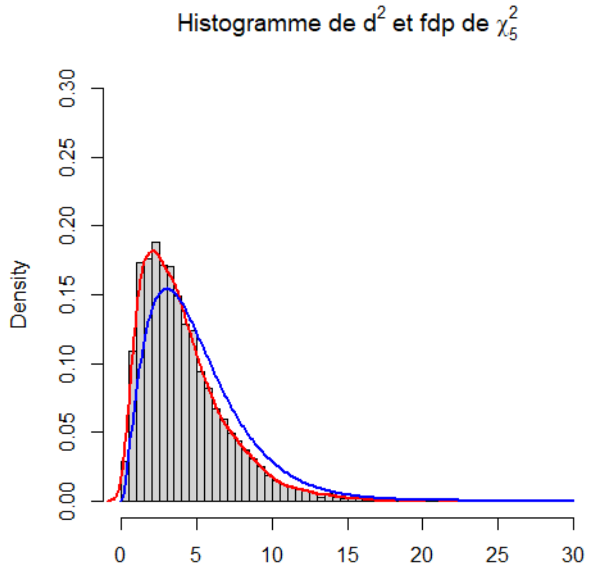

Histogramme de d² et fdp de χ^2_2
Density
0.00 0.05 0.10 0.15 0.20 0.25 0.30
0 5 10 15 20 25 30

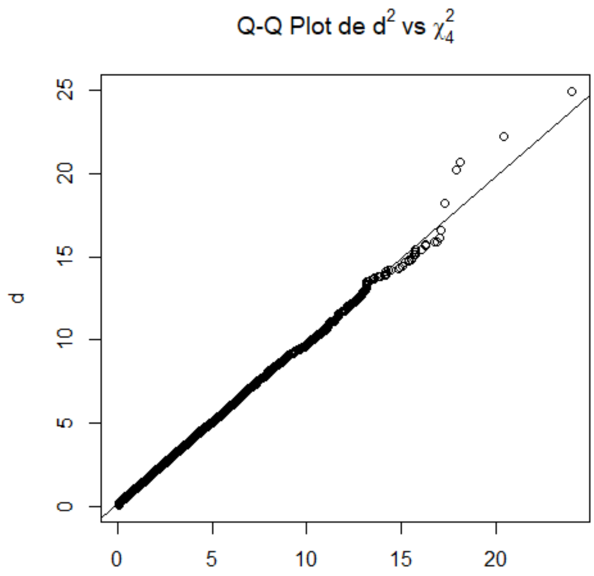

Histogramme de d² et fdp de χ^2_3
Density
0.00 0.05 0.10 0.15 0.20 0.25 0.30
0 5 10 15 20 25 30

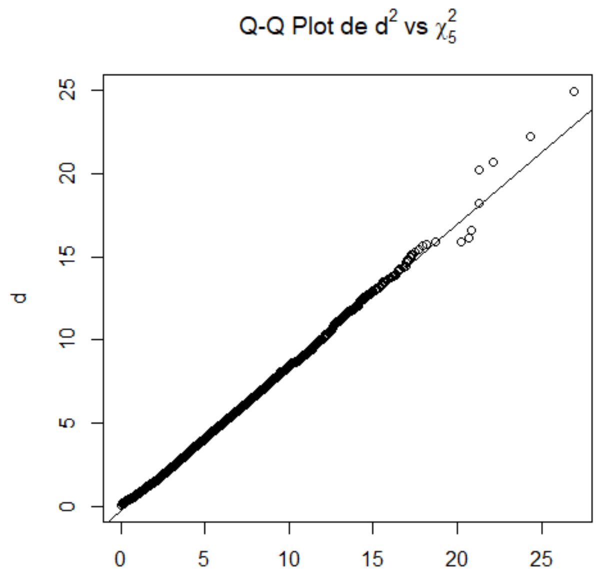

Q-Q Plot de d² vs χ^2_2
d
0 5 10 15 20 25
0 5 10 15

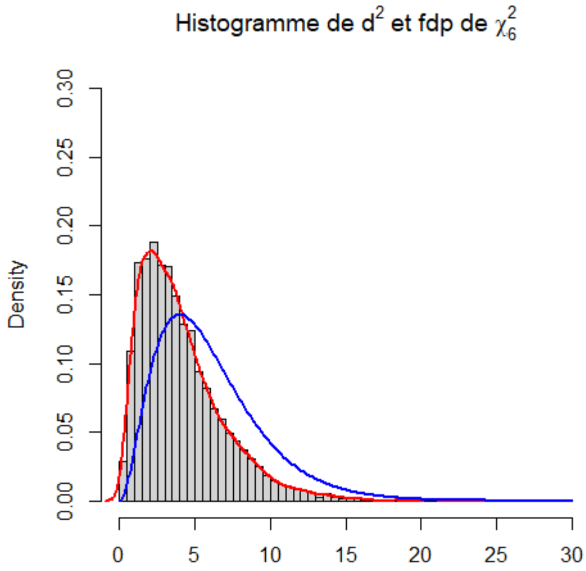

Q-Q Plot de d² vs χ^2_3
d
0 5 10 15 20 25
0 5 10 15 20

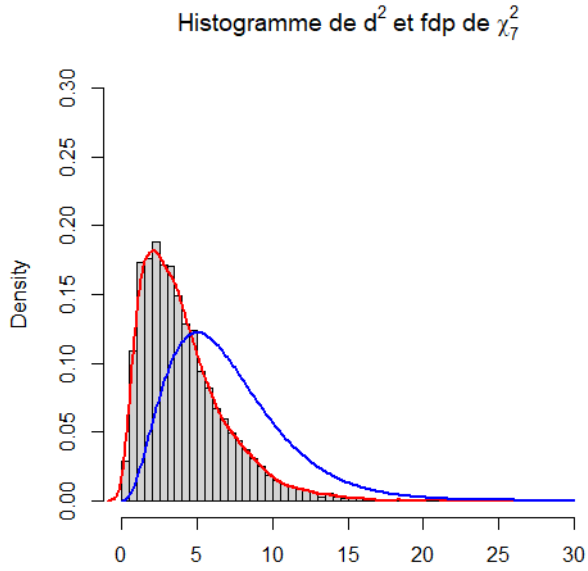

Histogramme de d² et fdp de χ^2_4
Density
0.00 0.05 0.10 0.15 0.20 0.25 0.30
0 5 10 15 20 25 30

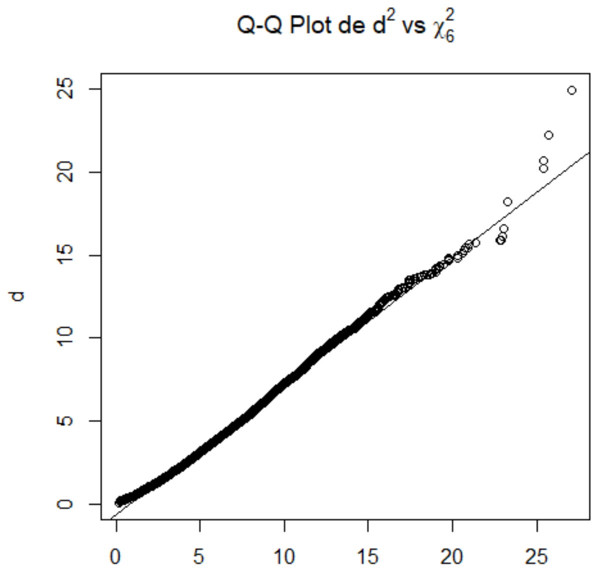

Histogramme de d² et fdp de χ^2_5
Density
0.00 0.05 0.10 0.15 0.20 0.25 0.30
0 5 10 15 20 25 30

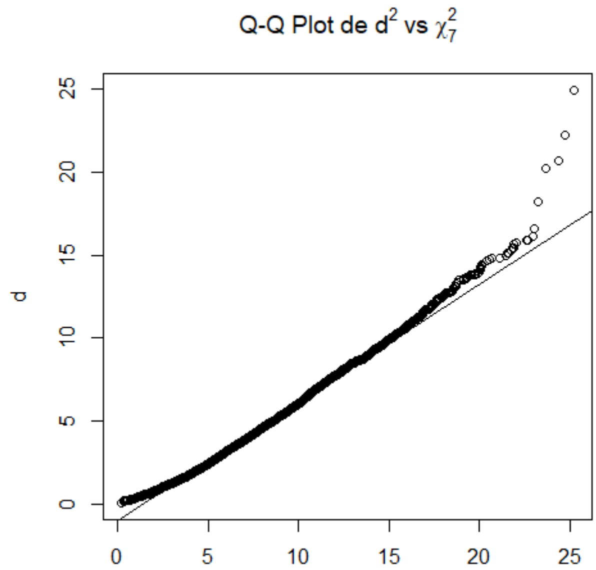

Q-Q Plot de d² vs χ^2_4
d
0 5 10 15 20 25
0 5 10 15 20


Q-Q Plot de d² vs χ^2_5
d
0 5 10 15 20 25
0 5 10 15 20 25



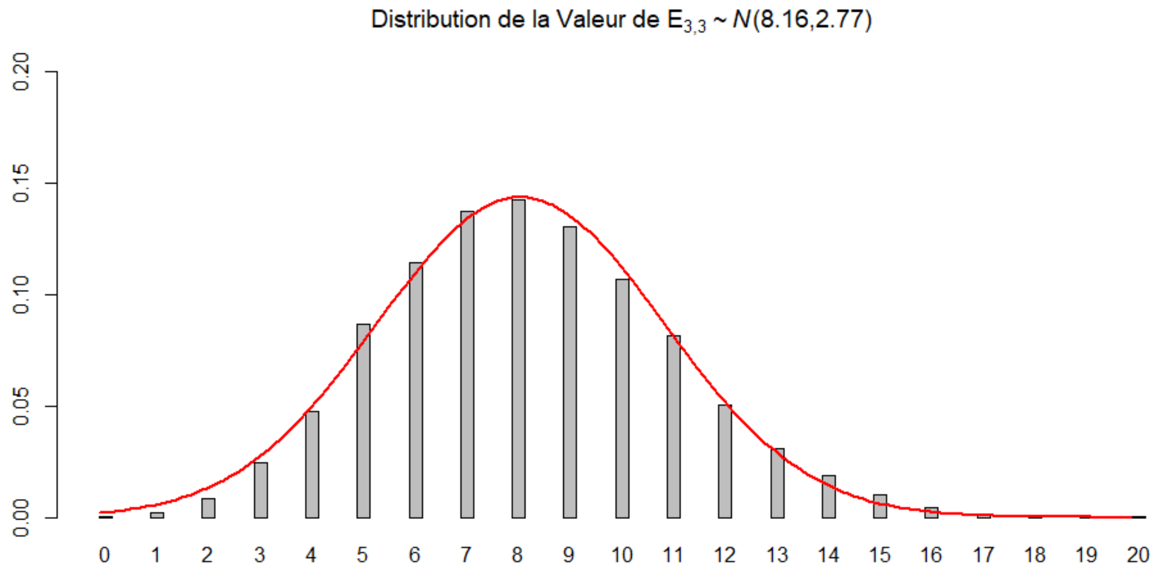






On peut alors émettre la conjecture que d^2 semble suivre une loi du χ^2 à 4 ou 5 degrés de liberté. Cette approche par simulation sera complétée par la mise en place du test du χ^2 puis l'institutionnalisation de la loi asymptotique de d^2.

Dans le cas du rejet de l'indépendance, l'étude devra se poursuivre par l'analyse des écarts à l'indépendance. On peut à cet effet s'intéresser à une unique cellule du tableau. Par exemple, choisissons la cellule correspondant à un caractère acidulé fort et un levain à l'épeautre. Sous l'hypothèse d'indépendance, la valeur attendue est $E_{3,3} \approx 8{,}16$ et la probabilité attendue est environ égale à 0,057. On peut alors par simulation étudier la distribution des valeurs de cette cellule et en déduire « l'écart » à la valeur attendue.



La valeur observée est 1, qui sous les conditions de l'indépendance, a peu de chance d'être observée, de probabilité inférieure à 0,05.

D'après le théorème central limite, la distribution des valeurs de cette cellule suit approximativement une loi normale de moyenne $E_{3,3} \approx 144 \times 0{,}057 \approx 8{,}16$ et d'écart type $\sqrt{144 \times 0{,}057\,(1-0{,}057)} \approx \sqrt{E_{3,3} \times (1-0{,}057)}$.

On peut alors considérer les résidus de Pearson standardisées égaux à $\frac{O_{i,j}-E_{i,j}}{\sqrt{E_{i,j}}}$ que l'on retrouve dans l'expression de la variable statistique d^2. Les résidus de Pearson standardisées vont suivre approximativement une loi normale centrée et d'écart type inférieur à 1. Ils mesurent l'attraction (positif) ou la répulsion (négatif) par rapport à la valeur attendue. Les résidus, correspondant à des écarts statistiquement significatifs et dont la contribution à d^2est forte, sont ceux dont la valeur est supérieure à 2 ou inférieure à -2, qui correspondent à au moins deux écart type dans la loi normale centrée réduite.

Le tableau des résidus de Pearson s'obtient sous R avec la commande >khi$residuals où khi est la variable informatique contenant le tableau des effectifs.

Caractère acidulé de la brioche / Type de levain	Faible	Moyen	Fort
Seigle	-2.0619652	-0.787336	4.335924
Froment	2.5106124	-1.439753	-1.472003
Épeautre	-0.7666865	2.301752	-2.506447

Le rejet de l'indépendance peut s'expliquer, par exemple, par une surreprésentation de la valeur observée de levain au seigle et d'un caractère acidulé fort et aussi par la sous-représentation de la valeur observée de levain à l'épeautre d'un caractère acidulé fort par rapport aux valeurs attendues.

Remarque :
Les lignes suivantes avec R permettent d'obtenir la légende du graphique avec les différentes lois du χ^2 :

```
graphics.off()
library(latex2exp)#écrire en latex dans les titres de graphiques
x=seq(0,30,0.1)
hist(d,breaks=100,prob=T,main=TeX(r'(Histogramme de la variable $d^2$)'),xlab='',ylim=c(0,0.3))
for (i in 2:6){
  lines(x,dchisq(x,i),col=i,lwd=2)
  legend(x=7,y=0.2+0.025*i,col=i,text.col=i,legend=(TeX(sprintf(r'($\chi_{%i}^{2}$)',i))),
         cex=1,bty='n',lwd=2)
}
```

- **Interprétation des résultats d'une analyse sensorielle.**

L'apprenant doit être à même de mettre en place une analyse sensorielle menée dans un contexte professionnel en abordant plusieurs outils usuels (épreuves discriminatives, de classement, de notation hédonique…).
Dans le cadre des épreuves discriminatives, deux modèles mathématiques sont utilisés : le modèle binomial et le modèle χ^2. En application du premier modèle, le test le plus couramment utilisé est le test triangulaire. Toutefois il n'est pas interdit de montrer son extension à 4 échantillons (épreuve du 1 parmi 4), à 5 échantillons (2 parmi 5), …à n échantillons (p parmi n). Un autre exemple d'utilisation du modèle binomial est l'épreuve "duo-trio" utilisée en contrôle de qualité. En application du second modèle, une épreuve de type A-non A est un très bon exemple facile à mettre en place (tableau de contingence 2x2).
De même, on aborde les épreuves de classement. Afin de comparer deux classements, on introduit le test non paramétrique de Mann-Whitney. Lors d'une épreuve de classement avec un jury plus nombreux, le test de Friedman (voire le test de Page) est alors privilégié. Enfin, au moins un exemple d'épreuve de notation hédonique est mené. À cette occasion, la normalité de la distribution peut être évaluée à l'aide des outils mise en place dans les autres capacités afin de pouvoir comparer plusieurs moyennes à l'aide d'une Analyse de Variance (ANOVA) à un facteur.
Suivant les usages professionnels rencontrés en entreprise, on peut être amené à aborder un exemple d'Analyse en Composante Principale (ACP) en s'appuyant sur les possibilités offertes par les outils informatiques, on peut employer par exemple les logiciels libres R et SensoMineR.
Un guide pratique, « Comment évaluer la qualité gustative d'un produit », peut accompagner la mise en place d'une analyse sensorielle avec les apprenants.
http://itab.asso.fr/downloads/programmes/solibam-fr.pdf

Pour tous ces tests, à partir d'une situation concrète et en équipe pluridisciplinaire, les étudiants construisent le plan de présentation, le plan de codification, le questionnaire, organisent et réalisent les analyses sensorielles puis le dépouillement pour fournir une interprétation statistique des résultats.

- **Mise en place d'automatismes (ou de rituels).**

En complément de ces études en contexte, la pratique d'automatismes vise à construire et entretenir des aptitudes dans le domaine mathématique. L'ensemble des automatismes doit être pratiqué quelles que soient les thématiques travaillées. L'enseignant peut proposer les situations suivantes, sans caractère exhaustif ni obligatoire :

- Maîtrise des puissances de 10 pour, par exemple, à partir d'un temps de réduction décimale, calculer des valeurs pasteurisatrice ou stérilisatrice.
- Résolution d'une équation à une inconnue pour déterminer un réactif limitant dans une réaction chimique, bilans matière, la croix des mélanges.
- Calcul du débit d'un chambreur connaissant le barème de pasteurisation.
- Calcul d'un débit dans une conduite de diamètre donné.
- Détermination du volume de gélose dans une boîte de Pétri.
- Représentations graphiques donnant plus de sens aux données dans un contexte professionnel en utilisant les outils numériques : évolution du chiffre d'affaires d'une entreprise, répartition des types de clients d'une entreprise, …

C6.1 Concevoir un plan de contrôle

L'apprenant doit être en mesure de lister et de planifier des contrôles pertinents, dans une situation contextualisée, et de justifier leur mise en œuvre.

Mobilisation de l'outil mathématique

- Mise en place d'un rituel (ou automatismes).
- Utilisation de notions de statistique et de probabilité en vue d'une estimation.
- Suivi de la fabrication à l'aide d'une carte de contrôle.

- Utilisation de notions de statistique et de probabilité en vue d'une estimation.

Distribution d'échantillonnage.

Pour être en mesure de proposer une estimation d'un paramètre, l'apprenant doit appréhender la notion de distribution d'échantillonnage.

Après avoir manipulé la notion d'échantillon aléatoire simple, on observe la distribution d'échantillonnage d'un paramètre d'une population (moyenne, variance, proportion) à l'aide des outils numériques avant de définir les variables aléatoires $\bar{X}$, S^2 et F associées.

Dans le cas de grands échantillons, les lois de $\bar{X}$ et F sont approchées par des lois normales.

Estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance.

Dans le cadre, si possible, d'une situation professionnelle, l'apprenant doit être capable de donner une estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance symétrique en probabilité à un niveau de confiance de 0,95 ou 0,99 d'une moyenne, d'un écart-type ou d'une proportion.

L'approche expérimentale de cette estimation peut avantageusement faire l'objet d'une simulation qui souligne l'importance de la taille de l'échantillon et de la variabilité du phénomène étudié.

Le cas de l'estimation par un intervalle de confiance d'une moyenne d'un caractère distribué selon une loi normale de variance inconnue donne l'occasion d'introduire et d'étudier la loi de Student. L'intervalle de confiance d'une variance, qui n'est pas symétrique, est construit à partir de la variable aléatoire $\frac{nS^2}{\sigma^2}$.

- Suivi de la fabrication à l'aide d'une carte de contrôle.

Carte de contrôle de la moyenne, de l'écart type.

Pour répondre aux habitudes en entreprise, l'apprenant doit être en mesure d'établir une carte de contrôle de la moyenne ou de l'écart type et de prendre les mesures nécessaires en cas de dysfonctionnement à l'aide de ses connaissances acquises dans les enseignements des matières professionnelles.

- Mise en place d'automatismes (ou de rituels).

En complément de ces études en contexte, la pratique d'automatismes vise à construire et entretenir des aptitudes dans le domaine mathématique. L'ensemble des automatismes doit être pratiqué quelles que soient les thématiques travaillées. L'enseignant peut proposer les situations suivantes, sans caractère exhaustif ni obligatoire :

- Passage d'une température en Kelvin à une température en degré Celsius.
- Temps de remplissage d'une éprouvette connaissant le débit.
- Quantité de pectine à ajouter à une confiture après cuisson en prenant en compte la destruction thermique.
- Application de la formule de la valeur stérilisatrice à température constante. (Une différenciation des apprentissages pourrait être envisagée avec un calcul d'intégrale pour une température du produit qui évolue au cours du temps.)
- Calcul du volume d'un chambreur (de forme cylindrique) pour plus tard estimer un temps de pasteurisation.

C6.2 Mettre en œuvre des techniques d'analyse nécessaires au contrôle qualité

L'apprenant doit être en mesure d'identifier, de préparer, mettre en œuvre et interpréter des analyses. On attend de l'apprenant qu'il mette en place un test statistique pour contrôler des performances en répondant à une situation contextualisée, issue le plus souvent possible d'un cas concret du domaine professionnel. Pour cette capacité, l'apprenant doit pouvoir justifier la mise en place d'un test adapté à la problématique posée, énoncer clairement les hypothèses nulle H_0 et alternative H_1, choisir une variable de décision et déterminer la région critique pour un risque α donné. De plus, il interprète des résultats à l'aide de ces outils statistiques et propose une analyse critique compréhensible par un professionnel ou le grand public en fonction de l'interlocuteur destinataire.

Par ailleurs, l'enseignement de mathématiques, en accompagnement des enseignements professionnels, aide à la validation des résultats grâce à la vérification préliminaire de la fiabilité et de la précision du matériel (métrologie).

Mobilisation de l'outil mathématique

- Mise en place d'un rituel (ou automatismes).
- Mise en œuvre d'une démarche statistique pour analyser des résultats (expérimentaux).

- Mise en œuvre d'une démarche statistique pour analyser des résultats (expérimentaux).

La mise en place d'un test statistique devra toujours répondre à une situation contextualisée, issue le plus souvent possible d'un cas concret du domaine professionnel. La compréhension de la démarche d'un test statistique classique correspond à un des objectifs principaux du cours de mathématiques. L'apprenant compare des méthodes d'analyse et répond aux questionnements qu'il pourra rencontrer le plus fréquemment dans sa vie professionnelle.

Le travail sur ce module est conduit sur un temps long, il paraît donc essentiel de développer des méthodes statistiques à partir de simulations, le théorème central limite étant le théorème sous-jacent. Il n'est pas nécessaire de l'énoncer mais par contre il est indispensable de l'illustrer pour diverses situations avec différentes lois. L'importance de la loi normale doit alors apparaître. Les outils numériques ont dans leur grande majorité les lois normales implémentées, il est donc impératif de se séparer des tables de lois normales et du recours systématique au changement de variable. Le théorème central limite amène à s'interroger sur le passage du discret au continu et donc à développer la notion de loi continue, majoritairement inconnue des apprenants.

L'enseignement doit concourir à développer la capacité à repérer des situations de référence de mise en œuvre de tests statistiques. L'objectif est moins de faire apprendre un catalogue de tests statistiques que de faire comprendre la méthodologie des tests et la construction de règles de décision s'appuyant sur la fluctuation d'échantillonnage de certaines grandeurs obtenue en premier lieu par simulation. La connaissance de certaines lois de probabilité de grandeurs lors de la variabilité des échantillons est l'aboutissement d'un travail préparatoire effectué par des simulations. Les tests doivent être adaptés aux situations rencontrées par les élèves, l'enseignant veille à avoir des exemples suffisamment diversifiés.

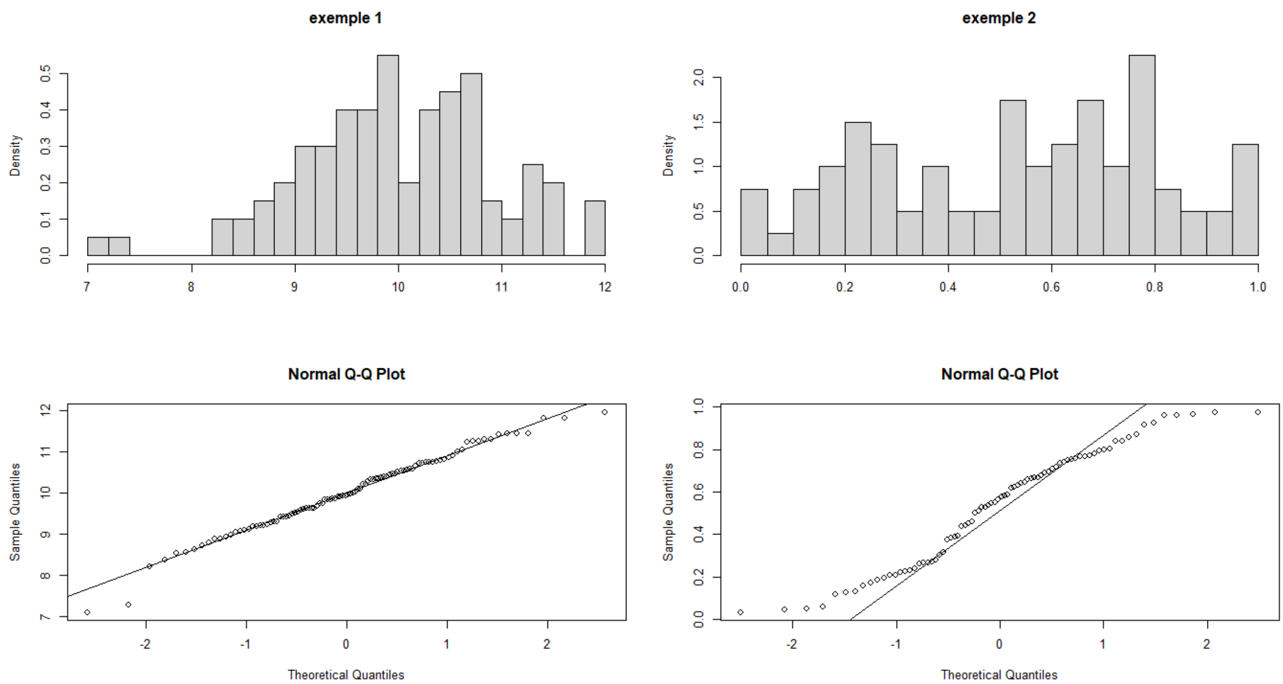
L'apprenant identifie clairement le cadre dans lequel se situe son travail : échantillons indépendants ou appariés, normalité des grandeurs ou non (test paramétrique ou non paramétrique, en comprenant les conditions et les limites de chaque situation), recherche d'une conformité d'une grandeur ou comparaison entre deux grandeurs ou comparaison de moyennes entre plusieurs séries. Une fois le cadre posé, le choix du test statistique s'effectue en fonction des besoins et des habitudes professionnelles des secteurs concernés. Par conséquent, l'apprenant mène un test de conformité d'une proportion, d'une moyenne ou d'une variance ; un test de comparaison de deux proportions, de deux moyennes ou de deux variances ; une analyse de la variance à un facteur pour comparer la moyenne de plusieurs séries. Enfin, pour répondre aux habitudes en entreprise, l'apprenant établit une carte de contrôle de la moyenne ou de l'écart type et prend les mesures nécessaires en cas de dysfonctionnement à l'aide de ses connaissances acquises dans les enseignements des matières professionnelles.

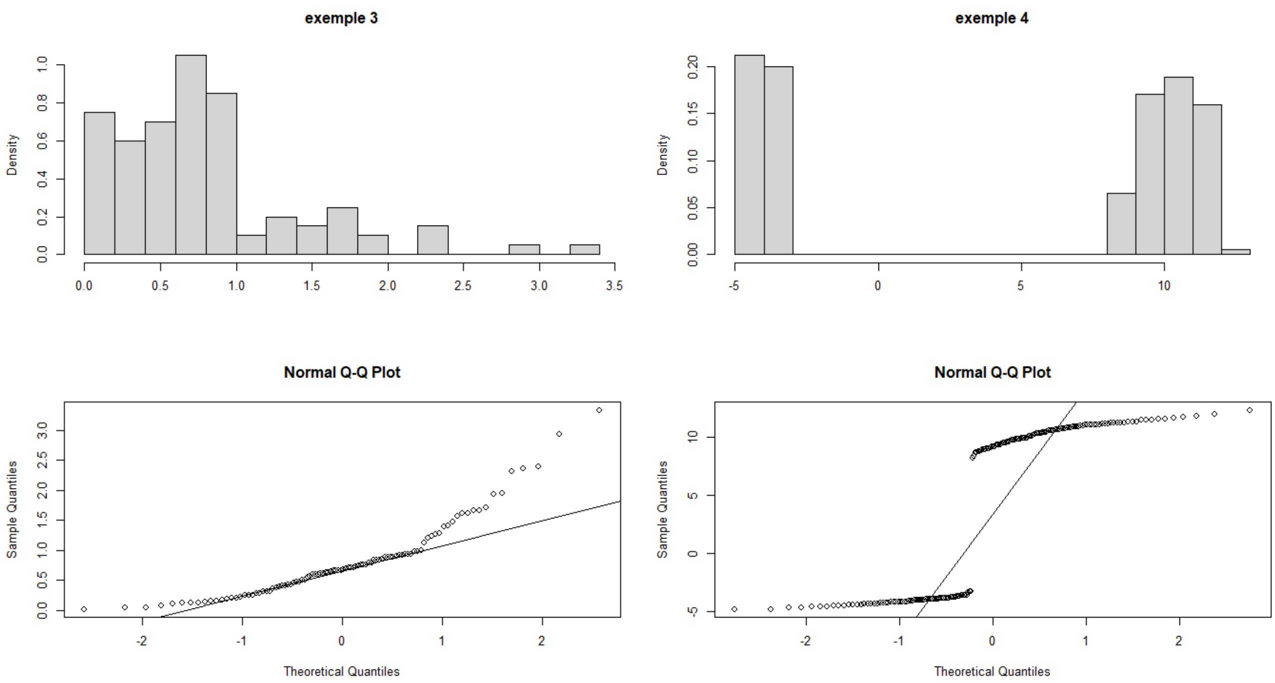
Les situations variées rencontrées dans le cadre de projets expérimentaux peuvent amener à mettre en place d'autres tests ou d'autres démarches (corrélation entre deux variables quantitatives, ANOVA à deux facteurs, test de Newman et Keuls, de Cochran, Analyse en Composante Principale, …). Il n'est pas possible d'envisager tous les cas de figure dans le cadre de ce document et de l'horaire imparti. L'apprenant comprend l'esprit de la mise en place d'un test statistique, puis avec l'accompagnement de l'enseignant ou du formateur et à l'aide de ses recherches personnelles, élargit ce qu'il est possible d'étudier lorsque cela s'avère nécessaire pour répondre à un problème initial.

Tous les calculs sont laissés à l'outil numérique. Même si son apprentissage peut être laborieux, le logiciel R fournit un grand nombre d'outils permettant de répondre à toutes les demandes et en particulier de travailler avec des données provenant de véritables expérimentations. Le travail est centré sur la reconnaissance des situations et le choix des méthodes.

Exemple 1 : Tester la normalité

Un préalable à beaucoup d'études est la normalité des grandeurs en jeu. Parfois, la situation impose de fait la normalité des grandeurs, d'autres fois il sera peut-être nécessaire de débuter par un test de normalité. Pour une première approche on peut s'appuyer sur la forme des histogrammes des échantillons et exposer la méthode de la droite de Henry. Tous les graphiques sont obtenus à l'aide de l'outil numérique. Par exemple, la commande qqnorm() du logiciel R permet de tracer le graphique quantile-quantile qui confronte les quantiles de la loi normale en abscisse et les quantiles empiriques de l'échantillon en ordonnée. La commande qqline() construit la droite joignant le couple des quantiles 0,25 et le couple des quantiles 0,75.





Cette approche graphique peut être complétée par le test de Shapiro-Wilk obtenu directement par la commande shapiro.test() du logiciel R. On ne rentre pas dans les détails de ce test. Il s'agit de développer un questionnement sur l'hypothèse de normalité au regard de son importance dans les conclusions du théorème central limite et de la somme de variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale.

On trouve pour les exemples ci-dessus :

Exemple 1	**Exemple 2**	**Exemple 3**	**Exemple 4**
W = 0,98982	W = 0,93316	W = 0,93141	W = 0,7231
p-value = 0,6503	p-value = 0.0004218	p-value = 5.993e-05	p-value < 2.2e-16

Pour le test de Kolmogorov-Smirnov, voir la commande ks.test() du logiciel R

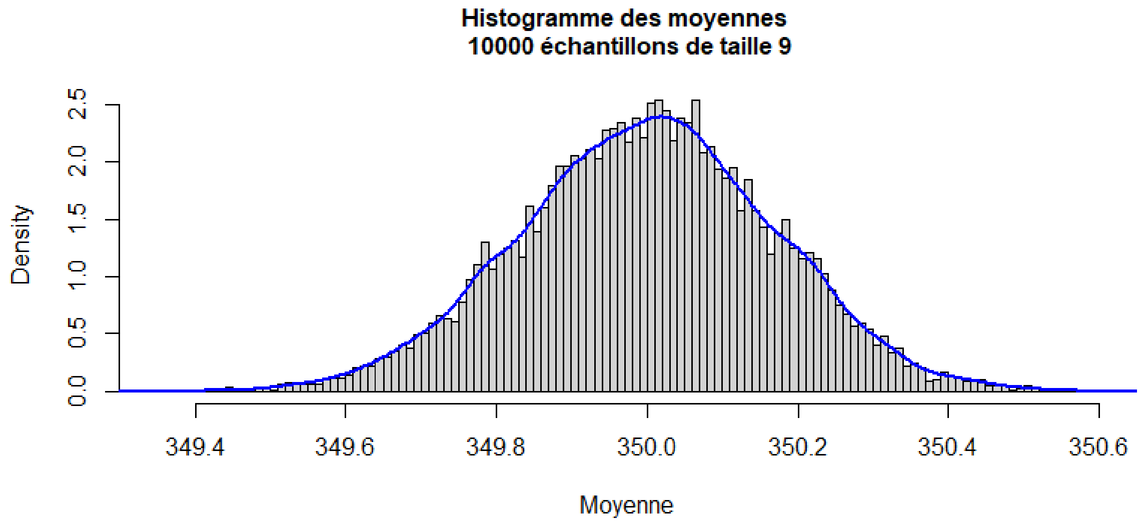
Exemple 2 : Introduire le test de conformité d'une moyenne

On considère une opération de mise en bocaux au sein de l'exploitation agricole d'un lycée de Bourgogne qui fabrique du bœuf bourguignon appertisé en bocaux de verre. On décide de mettre en place un contrôle régulier en prélevant des échantillons de taille $n = 9$. On admet que la distribution des masse des bocaux vides sans couvercle est gaussienne de masse moyenne 350 g et d'écart type $\sigma = 0{,}5$ g.

Un échantillon est prélevé et on obtient par exemple les valeurs :

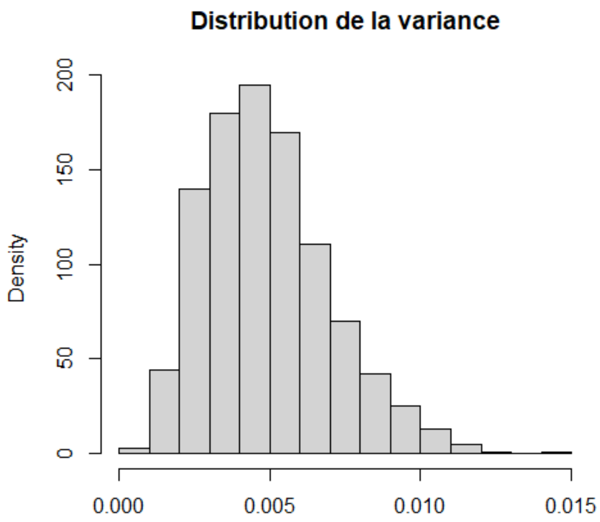
350,25 349,34 350,90 349,74 349,30 349,80 349,67
349,00 349,87

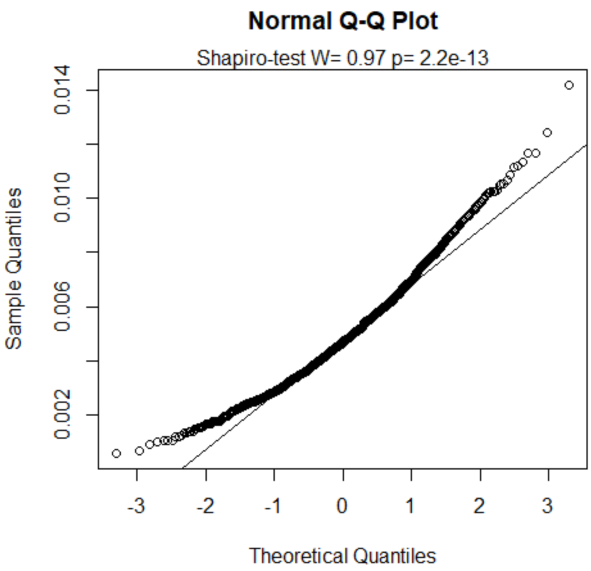
On simule par exemple 10000 échantillons de taille $n = 9$ d'une loi normale de paramètres $\mu = 350$ et $\sigma = 0{,}5$ et on étudie la distribution de la moyenne des masses de chaque échantillon. L'outil numérique permet d'obtenir un graphique du type ci-dessous. En s'appuyant sur ce graphique, on peut alors s'interroger sur la distribution d'échantillonnage d'une moyenne en particulier la normalité de la distribution puis amener le questionnement de la conformité d'une moyenne. La mise en place du test de conformité d'une moyenne et l'utilisation de la loi normale sont l'aboutissement de l'étude. On discutera de l'unilatéralité ou la bilatéralité du test.



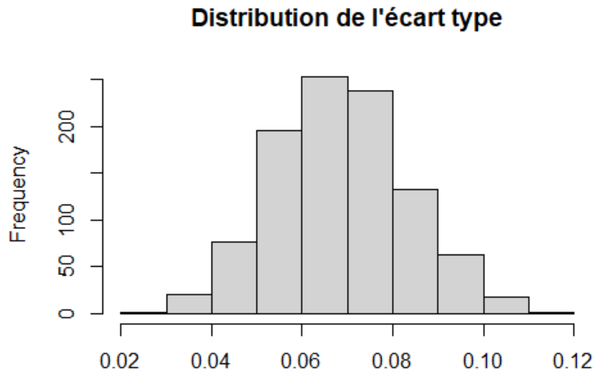
Exemple 3 : Introduire une nouvelle variable statistique

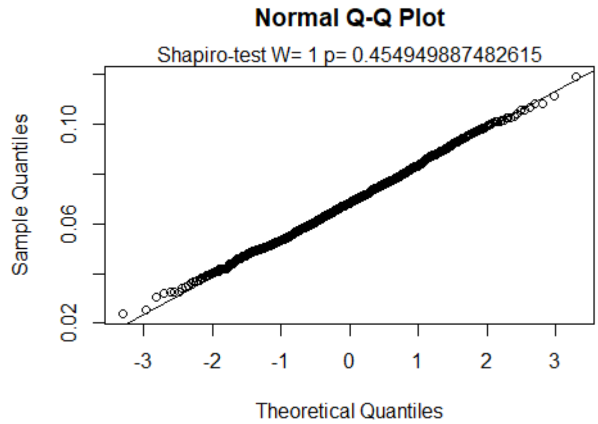
On considère que, pour un cépage donné, un vin rouge peut paraître acide si le pH est inférieur à 3,4.
On prélève un échantillon de 12 bouteilles dont les pH sont les suivants :
Echantillon 0 : 3.43 3.49 3.47 3.36 3.42 3.56 3.32 3.46 3.43 3.39 3.30 3.42
Après avoir posé la question de la normalité des valeurs de l'échantillon, l'estimation de l'écart type est au cœur des discussions. On est amené à étudier graphiquement les distributions des variances et des écarts types pour des échantillons gaussiens de taille 12 obtenus par simulation de la loi normale de moyenne 3,4 et d'écart type égale à l'écart type de l'échantillon 0. On peut au passage se poser la question de la normalité de ces distributions.



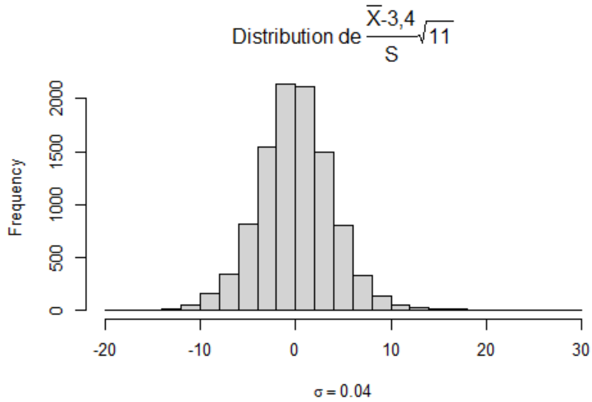


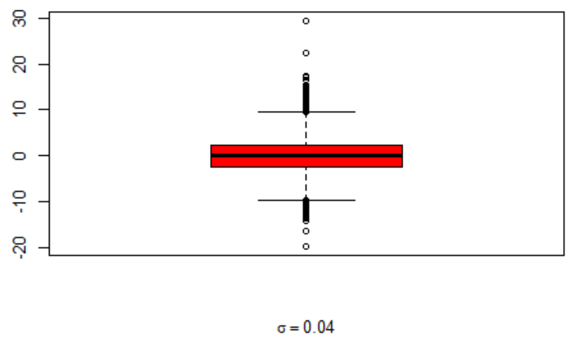
-

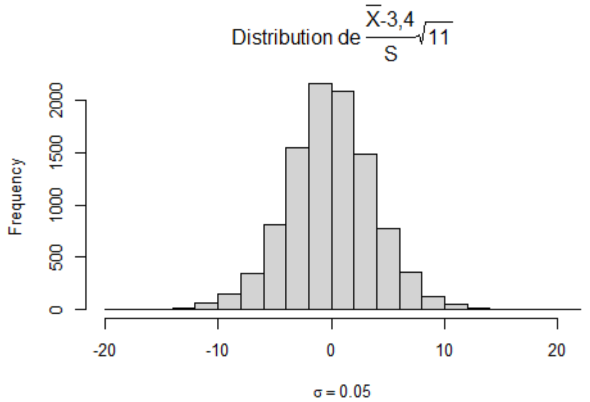


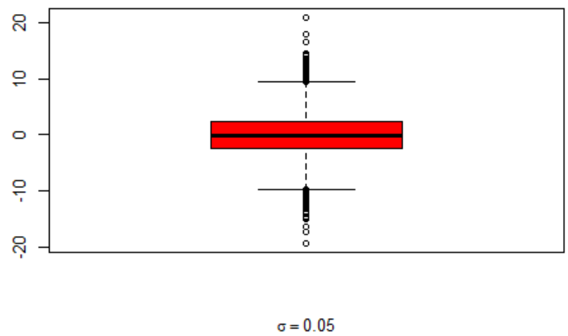


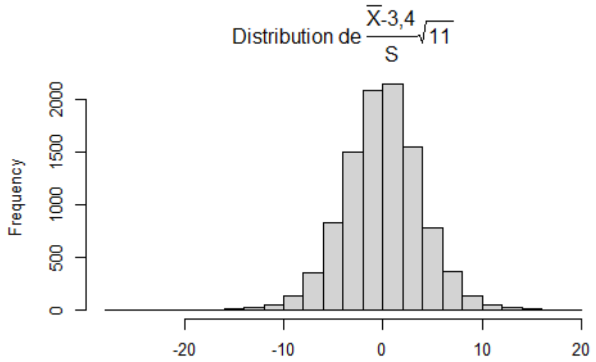
La variabilité de l'écart type des échantillons et le choix arbitraire de la valeur de l'écart type de l'échantillon 0 plutôt qu'une autre valeur amènera à considérer une autre variable statistique $\frac{\bar{X}-3{,}4}{S}\sqrt{11}$ où chaque échantillon simulé a la même importance dans le choix de l'écart type. On peut constater que si l'on fait varier l'écart type autour de la valeur de l'échantillon 0, la loi de cette variable reste stable, ce qui peut se constater en observant les histogrammes et les diagrammes en boîte ci-dessous.



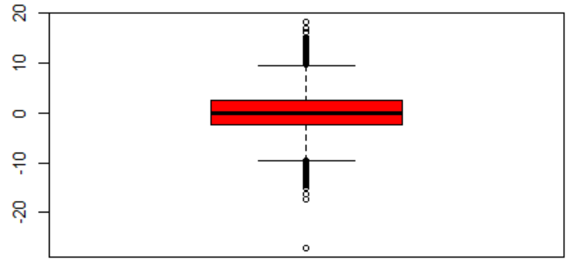




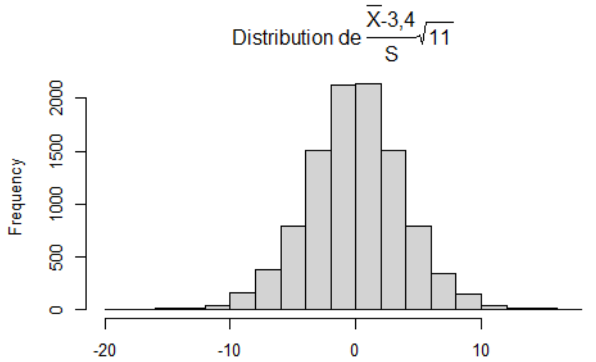




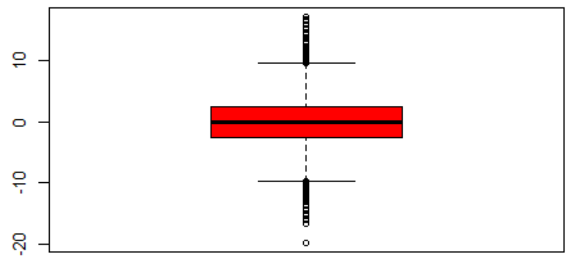
σ = 0.06



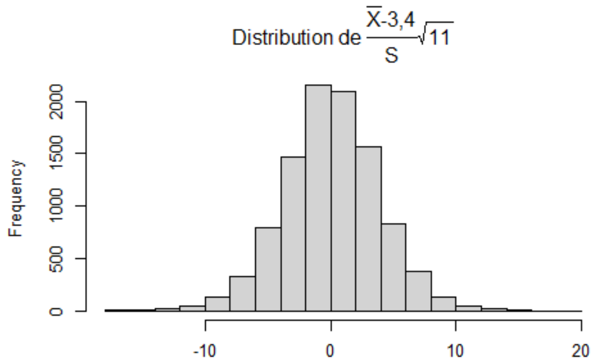
σ = 0.06



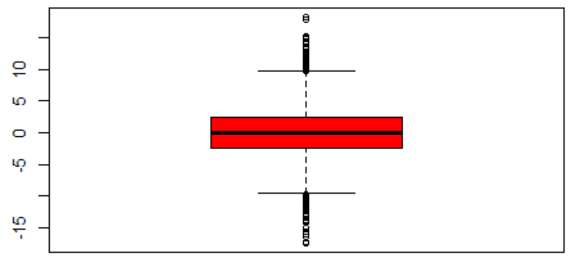
σ = 0.07



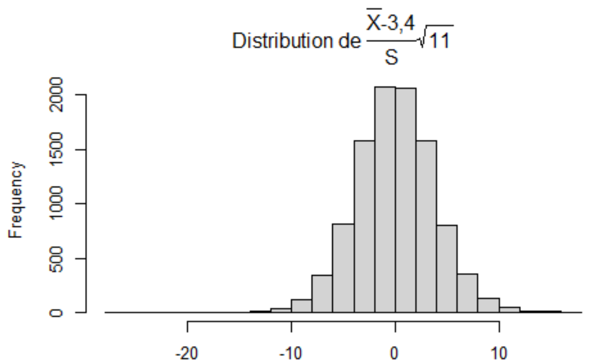
σ = 0.07



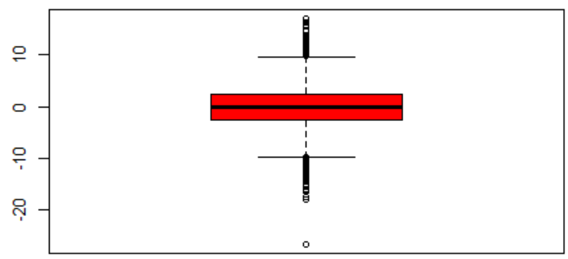
σ = 0.08



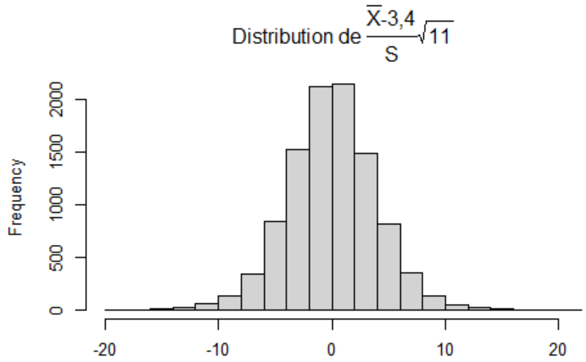
σ = 0.08



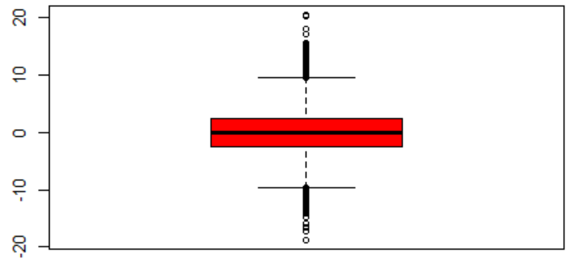
σ = 0.09



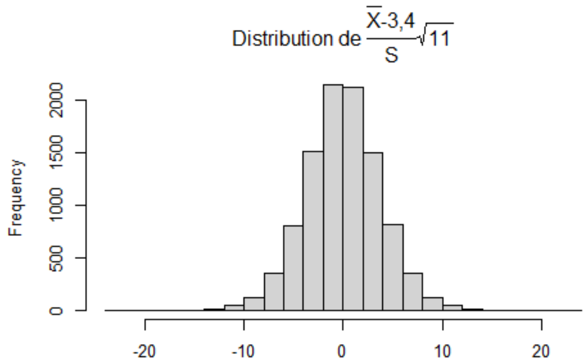
σ = 0.09



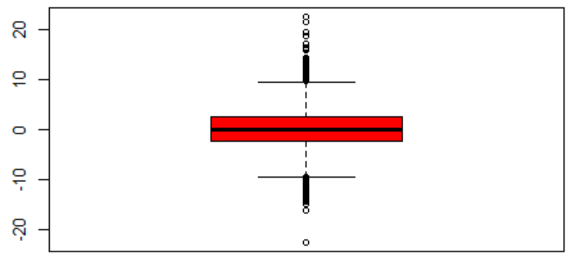
σ = 0.10



σ = 0.10

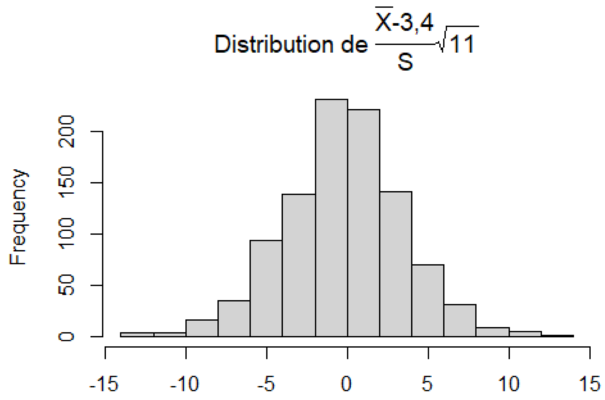


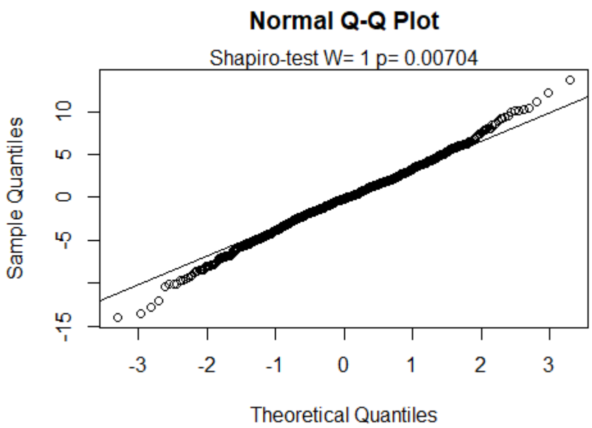
σ = 0.11



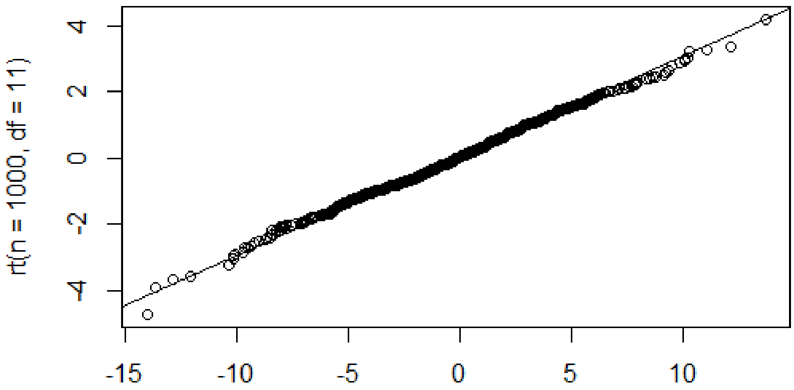
σ = 0.11

Le rejet de la loi normale pour cette nouvelle variable statistique induira l'introduction de la loi de Student.





On peut, pour confirmer l'introduction de cette nouvelle loi, construire le graphique quantile-quantile entre $\frac{\bar{X}-3,4}{s}\sqrt{11}$ et la loi de Student T_{11}.



La mise en place du test avec la loi de Student conclura l'exemple. On pourra discuter de l'unilatéralité ou de la bilatéralité du test.

-

- **Mise en place d'automatismes (ou de rituels).**

En complément de ces études en contexte, la pratique d'automatismes vise à construire et entretenir des aptitudes dans le domaine mathématique. L'ensemble des automatismes doit être pratiqué quelles que soient les thématiques travaillées. L'enseignant peut proposer les situations suivantes, sans caractère exhaustif ni obligatoire :

- Passage d'une pression en atmosphère à une pression en bar ou en pascal.
- Calcul de prix TTC à partir d'un prix HT et inversement, avec des taux de TVA différents.
- Manipulation des formules dans des cas de dilutions successives d'un échantillon.
- Convertir cm3 en L, kg en µg, ha en km²,...
- Détermination d'une durée de réduction décimale, par exemple à partir d'une courbe de survie.
- Détermination d'un taux de réduction décimale.

C6.3 Contrôler les performances techniques de la ligne de production

On attend de l'apprenant qu'il soit en mesure, dans une situation contextualisée, de justifier la mise en œuvre de contrôles pertinents dans une optique de suivi des performances en collaboration avec les deux autres disciplines impliquées. Pour cela, il met en place une modélisation à partir d'outils mathématiques : ajustement et lois de probabilités entre autres, qui peuvent être également utilisés dans d'autres sous-capacités.

L'apprenant doit être en mesure de lister et de planifier des contrôles pertinents, dans une situation contextualisée, et de justifier leur mise en œuvre.

Mobilisation de l'outil mathématique

- Mise en place d'un rituel (ou automatismes).
- Utilisation des notions de statistique en vue d'une modélisation *a priori*.

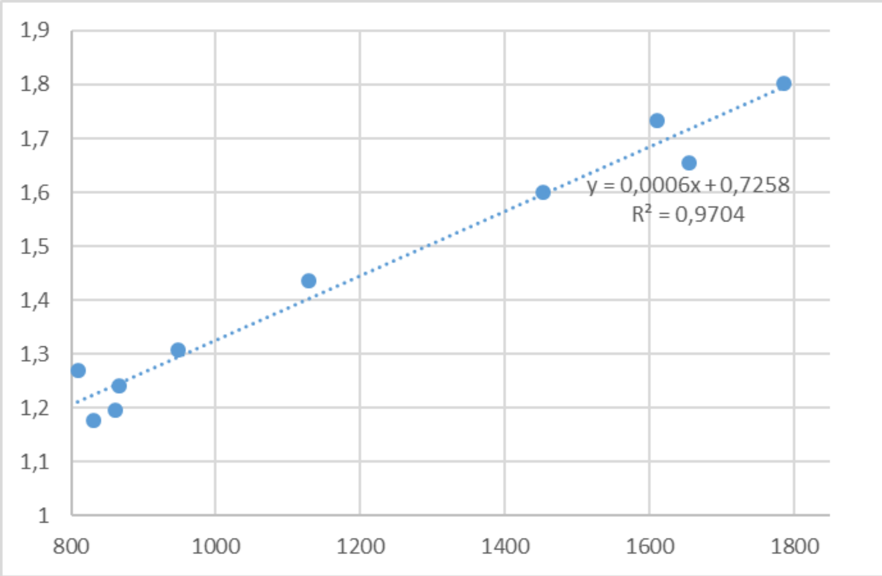
Réalisation d'une modélisation simple en utilisant un ajustement.
L'apprenant doit pouvoir réaliser une modélisation simple à l'aide d'un ajustement affine nécessitant éventuellement un ou des changements de variables pour obtenir un ajustement utilisant des fonctions logarithmes, exponentielles ou puissances.
Les situations étudiées sont variées et essentiellement issues du domaine professionnel. Elles doivent être réfléchies au sein de l'équipe pédagogique (courbe d'étalonnage, métrologie, croissance de populations microbiennes…). Le cours de mathématiques est l'occasion d'une première approche qui pourra être exploitée et complétée ultérieurement dans d'autres enseignements.
La phase de compréhension réalisée, qui doit s'appuyer sur une approche graphique, les calculs en situation sont exclusivement effectués à l'aide d'un outil numérique (calculatrice, courbe de tendance du tableur, logiciel R, applications dédiées).
Aucune technicité inutile, détaillant les calculs pas à pas, pour obtenir un ajustement n'est à maîtriser par l'apprenant. Le résultat obtenu avec l'outil numérique et l'interprétation faite des résultats sont à privilégier.
La qualité de l'ajustement obtenu est questionnée en distinguant la variable explicative et la variable expliquée et en étudiant les résidus. Les coefficients de corrélation linéaire et de détermination apportent des informations pour l'interprétation des résultats, pour autant, on souligne les limites éventuelles de ces indicateurs.

Corrélation et causalité.
Au-delà de la mise en évidence d'une corrélation, le fait que, sur un relevé statistique, il puisse exister une relation entre deux grandeurs (corrélation), ne signifie pas pour autant qu'il existe entre elles un lien de causalité.

Exemple :
Il a été relevé sur plusieurs années, aux USA, le nombre de nouveaux doctorats en informatique et les revenus générés par les jeux d'arcades.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Doctorats décernés en science informatique aux USA	861	830	809	867	948	1129	1453	1656	1787	1611
Revenus générés par les jeux d'arcade	1,196	1,176	1,269	1,24	1,307	1,435	1,601	1,654	1,803	1,734

La corrélation est évidente, la causalité beaucoup moins !



Lois de probabilité.

Les notions de variable aléatoire, d'espérance mathématique, de variance, d'écart type et l'interprétation de ces paramètres pour une loi discrète ou une loi continue sont abordées en situation avant d'être formalisées.

La loi binomiale et la loi normale sont étudiées principalement. Un échange avec les collègues qui interviennent dans les enseignements professionnels est nécessaire afin de contextualiser l'étude des lois. D'autres lois en liaison avec le domaine professionnel peuvent être introduites si elles répondent à un besoin spécifique identifié.

Les lois de probabilité peuvent être aussi l'occasion de procéder à une différenciation des apprentissages suivant le bagage et la poursuite d'études envisagée de chaque apprenant en liant l'étude de variables aléatoires continues au calcul de probabilité, calcul intégral et calcul d'aire en privilégiant le contexte professionnel.

Les changements de variables pour revenir à un calcul de probabilité sur la loi normale centrée réduite, l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale et la correction de continuité qui en résulte ou la lecture directe ou inverse d'une table de la loi normale centrée réduite pourraient être abordées et expliquées. Les outils numériques actuels doivent permettre ensuite systématiquement la détermination d'une valeur exacte rapidement obtenus dans le contexte de la situation choisie.

La phase de compréhension réalisée, les calculs en situation sont exclusivement effectués à l'aide d'un outil numérique (calculatrice, tableur, logiciel R, applications dédiées). On insiste alors sur l'interprétation des résultats. Le traitement de simulations avec des outils numériques pour illustrer les notions précédentes est recherché dès que cela est possible.

- **Mise en place d'automatismes (ou de rituels).**

En complément de ces études en contexte, la pratique d'automatismes vise à construire et entretenir des aptitudes dans le domaine mathématique. L'ensemble des automatismes doit être pratiqué quelles que soient les thématiques travaillées. L'enseignant peut proposer les situations suivantes, sans caractère exhaustif ni obligatoire :

- Calcul des quantités de matières premières à partir d'une formulation (recette) donnée. Mêmes calculs dans le cas d'un surdosage ou un sous-dosage d'un pourcentage donné.
- Détermination du degré Brix (°B) d'un liquide donné.
- Cinétique d'évolution du nombre de micro-organismes survivants (en valeurs logarithmiques) en fonction du temps de chauffage.
- Détermination graphique de la vitesse de croissance maximale d'une population.
- Détermination de l'équation d'une droite dans le cadre d'un étalonnage. Interprétation de la pente et de la déviation à l'origine.

Annexe 1

Exemple: Introduire le test d'indépendance du Khi2

Introduire la distribution du χ^2 par simulation de l'adéquation à une loi. Par exemple, appuyons-nous sur l'expérience de Mendel sur la transmission de caractères sur les pois.

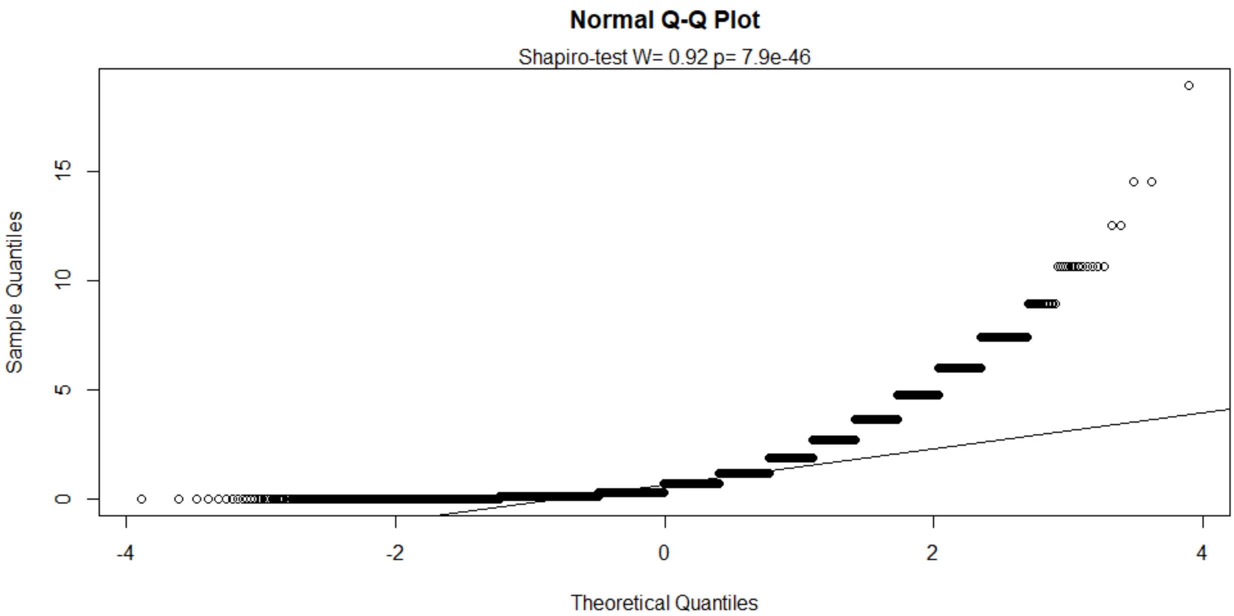
Pour comprendre la transmission d'un caractère d'une génération à l'autre, Mendel féconde artificiellement deux variétés de pois de lignée pure. L'un avec le caractère « graines lisses », l'autre avec le caractère « graines ridées ». La descendance obtenue (F1) ne possède que des graines lisses. Il poursuit l'expérience en réalisant l'autofécondation de la génération (F1). Il obtient la répartition suivante pour la génération (F2).

Caractère	Graines ridées	Graines lisses	Total
Effectifs	21	51	72

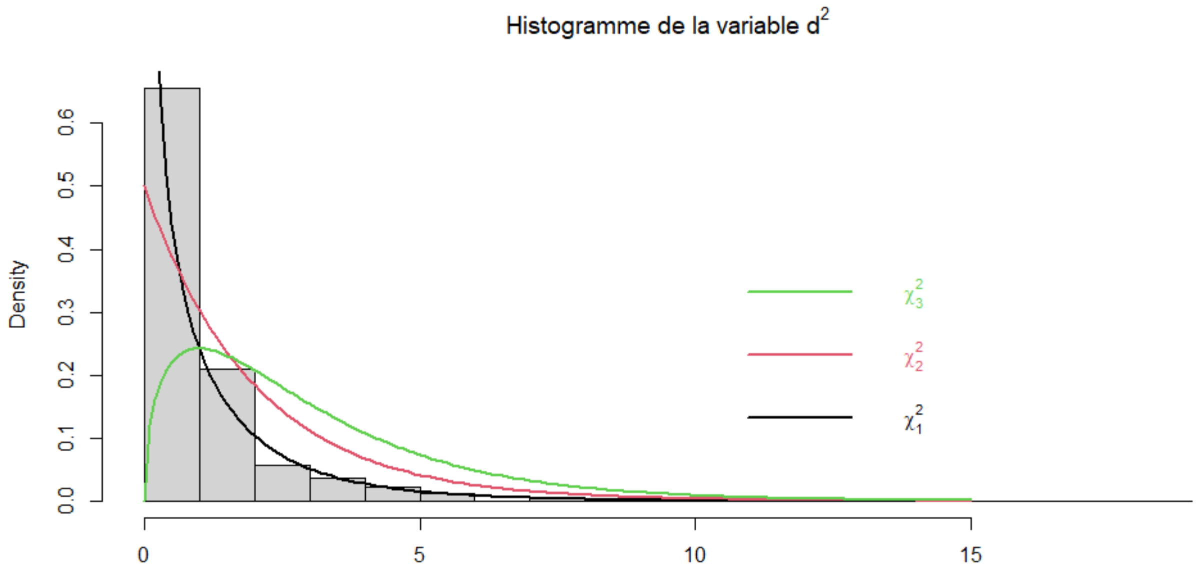
Ces résultats expérimentaux confirment-t-ils l'hypothèse de Mendel qui prévoit une répartition de 25% et 75% ?

On simule la variable statistique d^2 et on étudie sa répartition. En notant $O_{i,j}$ les effectifs observées et $E_{i,j}$ les effectifs attendus calculés à partir du modèle de Mendel.

$$d^2 = \sum_{i,j} \frac{(O_{i,j} - E_{i,j})^2}{E_{i,j}}$$



La forme de l'histogramme indique que la distribution de d^2 ne s'apparente pas à une loi normale, hypothèse qui peut être confirmée avec un Q-Q Plot et un test de Shapiro-Wilk. On est donc amené à chercher une autre loi. Ce qui permet d'introduire les lois du χ^2.

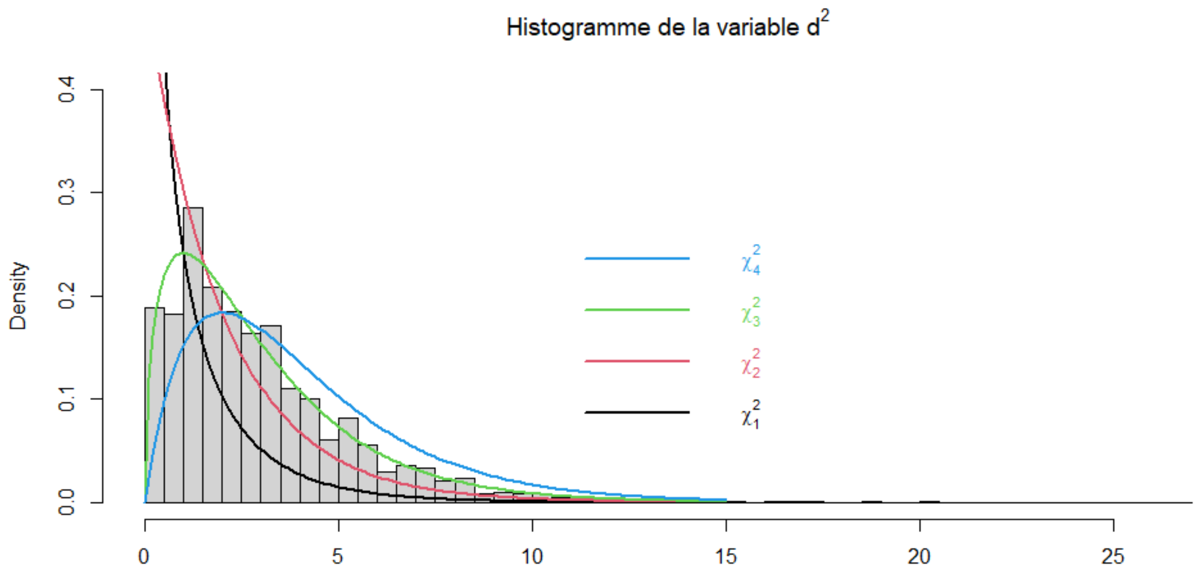


On peut alors s'intéresser à l'expérience de Mendel avec deux caractères exprimés par des gènes comportant deux allèles (l'un dominant A, B et l'autre récessif a, b) sur des chromosomes différents.
On obtient pour la génération (F2) le tableau suivant :

Caractères	**Ab**	**aB**	**Ab**	**AB**	**Total**
Effectifs	3	15	13	33	64

Ces résultats expérimentaux confirment-t-ils l'hypothèse de Mendel qui prévoit la distribution $\left(\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{9}{16}\right)$?

De la même manière, on obtient :



Bibliographie :

Les normes ISO (https://www.iso.org/fr/standards.html) ou AFNOR (https://www.afnor.org/) servent de référence.

Des Mooc (Massive Open Online Course ou FLOT) peuvent permettre d'approfondir certaines notions. Par exemple, Statistiques pour l'ingénieur de l'Institut Mines-Télécom ou Analyse de données multidimensionnelles d'Agrocampus Ouest sont régulièrement ouverts sur la plateforme Fun.