Document d'accompagnement thématique

MINISTÈRE DE L'AGRICULTURE ET DE L'ALIMENTATION

Inspection de l'Enseignement Agricole

Diplôme: BTSA Gestion Forestière

Thème : Exemples de mobilisation des mathématiques dans des situations favorisant l'acquisition de capacités.

Commentaires, recommandations pédagogiques,

L'enseignement des mathématiques doit contribuer, notamment en lien avec les disciplines professionnelles, à l'acquisition des capacités :

C41 – Caractériser le potentiel de l'espace forestier

C42 – Mobiliser les outils et méthodes d'aide au diagnostic

C73 – Cuber, classer, estimer.

L'enseignant veillera à s'appuyer sur les acquis des élèves pour développer de nouveaux outils mathématiques principalement dans le but de répondre à des problématiques professionnelles. La mobilisation de ces outils dans le cadre de la résolution de problèmes concourt à l'obtention des capacités professionnelles susvisées. Cela donne du sens, puis montre l'importance de mobiliser de nouveaux outils mathématiques au service de l'acquisition des capacités professionnelles.

L'enseignement des mathématiques est intégratif et l'association avec ce qui est fait dans les disciplines professionnelles est un appui qui permet d'ancrer durablement les apprentissages. Les contextes doivent varier en fonction des situations techniques et provenir de documents issus de sources multiples : l'INSEE, AGRESTE, les rendez-vous techniques de l'ONF : https://www.onf.fr/onf/ressources---special-rendez-vous-techniques. D'autres sources sont proposées dans ce document ainsi que dans les documents d'accompagnement des blocs 4 et 7.

Les progressions construites par l'enseignant de mathématiques en collaboration avec les enseignants de disciplines professionnelles doivent être en cohérence avec les attentes didactiques et pédagogiques de chaque discipline.

La résolution de problèmes demande de mobiliser des techniques calculatoires. Les calculs, pour une grande partie, peuvent être délégués à un outil de calcul numérique (calculatrice, tableur, logiciel de calcul, …). Il ne s'agit pas ici de développer une virtuosité technique mais plutôt de se positionner comme observateur et de se questionner sur les processus mis en œuvre dans le domaine professionnel. La recherche de réponses amène naturellement à élaborer des démarches, mener des calculs à l'aide d'un outil adapté, s'assurer de la cohérence de résultats et prendre des décisions.

L'institutionnalisation des notions, phase indispensable dans le processus d'apprentissage, a pour but d'expliciter les savoirs et les savoir-faire qui ont été mobilisés pendant la séance ou séquence, de donner des repères simples aux apprenants. Ce temps doit être court et synthétique. Les développements théoriques sont réduits à l'essentiel et toujours présentés dans un cadre simple.

Les situations développées dans ce document ne couvrent pas la totalité du référentiel mais illustrent l'esprit dans lequel l'enseignement des mathématiques doit être mis en œuvre.

Des mathématiques transversales à tous les blocs de compétences.

L'acquisition des capacités professionnelles demande d'aborder de nouvelles notions qui s'appuient de façon implicite sur des connaissances mathématiques vues dans les classes antérieures du collège et du lycée. Certaines difficultés d'apprentissage de ces nouveaux concepts proviennent d'un manque de maîtrise de ces prérequis. Il est indispensable d'y consacrer régulièrement du temps afin de réactiver et consolider ces savoirs sans entrer dans un schéma de révision. Le choix de réinvestir les notions transversales suivantes est décidé en fonction de la progression choisie et définie en cohérence avec les disciplines professionnelles:

- Proportion, pourcentage et proportionnalité,
- Sens des opérations, application de formules, représentation graphique de fonctions et exploitation graphique,
- Représentations de diagrammes statistiques pertinents, interprétation et utilisation d'indicateurs statistiques,
- Probabilités élémentaires, lien entre fréquences et probabilités, arbres de probabilités.

Afin que les apprenants soient aguerris aux pratiques calculatoires élémentaires favorisant l'acquisition des capacités, des automatismes mathématiques doivent être développés par un travail régulier, afin d'obtenir une aisance suffisante. La pratique de l'ensemble de ces items doit être très régulière, principalement sur des situations en lien avec les disciplines professionnelles.

Au-delà d'une pratique dans toutes les activités de la classe, il est aussi important d'entretenir ces automatismes par des rituels de début de séance, très régulièrement sur l'ensemble des deux années, sous forme de « questions flash » privilégiant l'activité mentale avec un recours à des connaissances, des procédures, des méthodes et des stratégies fondamentales dans la pratique professionnelle. Cela ne doit pas faire l'objet d'un chapitre d'enseignement spécifique car les notions qui les sous-tendent ont été travaillées dans les classes antérieures. Cette pratique, propre à chaque enseignant, doit s'adapter aux besoins des professionnels.

Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs mais donnent une orientation de ce qui peut être fait.

Parmi eux, certains doivent être propices au calcul mental.

- Sens des opérations qui permet d'effectuer des calculs courants.
- Calculer une moyenne, une moyenne pondérée.
- Passer d'une proportion (1/2, 3/4, 1/5, …) à un pourcentage (50%, 75%, 20%, …) et inversement.
- Calcul de pourcentages, calcul de prix TTC à partir d'un prix HT et inversement, avec des taux de TVA différents.
- Lier augmentation et diminution en pourcentage avec coefficient multiplicateur et les utiliser en situation.
- Comparer en situation des proportions et des pourcentages.
- Application de formules et détermination de la valeur numérique d'une grandeur connaissant les autres.
- Calculs géométriques élémentaires s'appuyant sur les objets géométriques élémentaires : rectangle, carré, triangle, cube, pavé, cylindre.
- Conversions de mesures et capacités usuelles (cm^3 en L, ha en km^2,…)
- Reconnaitre graphiquement des fonctions de référence, en décrire les variations et les extremums.
- Choisir une représentation graphique adaptée pour représenter des données, des proportions ou des pourcentages (graphique, diagramme circulaire, semi-circulaire, diagramme en bâton ou en barres, barres empilées,…).
- Inversement, interpréter des diagrammes et retrouver des données statistiques à partir de représentations.

Les outils numériques doivent être intégrés à l'enseignement des mathématiques. Ils apportent une plus-value permettant d'aborder de véritables problèmes issus des disciplines professionnelles. L'usage des outils numériques tels que le tableur, les logiciels de traitement de données statistiques, de sondage, de cartographie, … doit être pensé dans l'optique de résoudre des problèmes qui n'auraient pas été accessibles sans ces outils. La maîtrise de ces outils numériques n'est pas un but de l'enseignement des mathématiques. La calculatrice reste aussi un outil facilement mobilisable en classe. Cela n'est pas contradictoire avec une pratique du calcul mental régulière mais raisonnée, tant par la difficulté des questions posées que le contexte de sa pratique.

C41 - Caractériser le potentiel de l'espace forestier

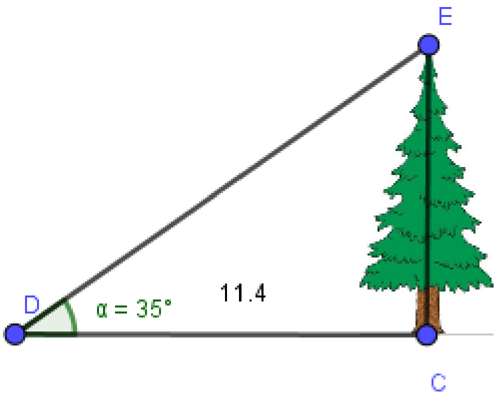
Bibliographie :

http://jymassenet-foret.fr/coursdendrometrie.html

http://www.sylvaingaudin.fr/PDF/Dendro.pdf

Caractérisation des éléments topographiques et analyse de leurs conséquences

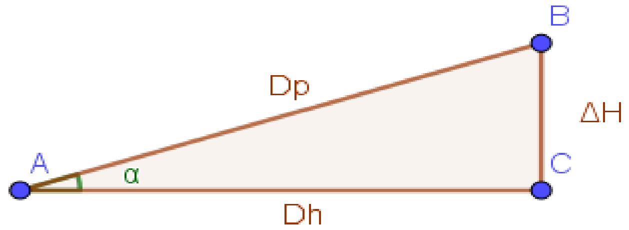
L'usage du grade en topographie amène l'enseignant de mathématiques à présenter cette unité comme proportionnelle au degré pour laquelle 90 degrés (°) correspondent à 100 grades (gon). La persistance de ces unités sur certains appareils de mesure nécessite de former les apprenants à passer de l'une à l'autre aisément. Pour autant les raisonnements trigonométriques restent indépendants de l'unité.



L'enseignement de la topographie est l'occasion de travailler sur les relations trigonométriques dans le triangle rectangle qui permettent, à partir de la connaissance de deux longueurs et un angle, de déterminer le triangle. Dans une approche épistémologique de la trigonométrie, il importe de faire comprendre sa capacité à calculer le non mesurable.

Dans un premier temps on traite de situations simplifiées.

Par exemple, à une distance de 11,4 m, un arbre est vu avec un angle de 35°. La hauteur (non mesurable sur le terrain) se détermine par la relation $CE = 11{,}4 \tan(35) \approx 8$.



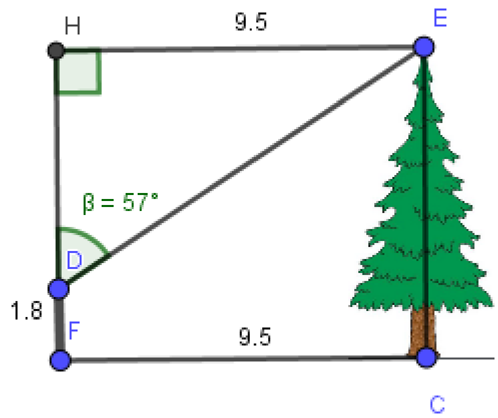
D'autres situations permettent dans un premier temps de se réapproprier une pratique, en particulier avec des calculs de dénivelé et de pente.

Si le terrain n'est pas parfaitement horizontal, il faut considérer que l'on mesure (à l'aide d'un ruban par exemple) la distance Dp suivant la valeur α. déterminée par un appareil de mesure comme un télémètre laser.

On en déduit alors :

- $Dh = Dp \cos(\alpha)$ et $\Delta H = Dp \sin(\alpha)$
- La pente définie par $\tan(\alpha)$

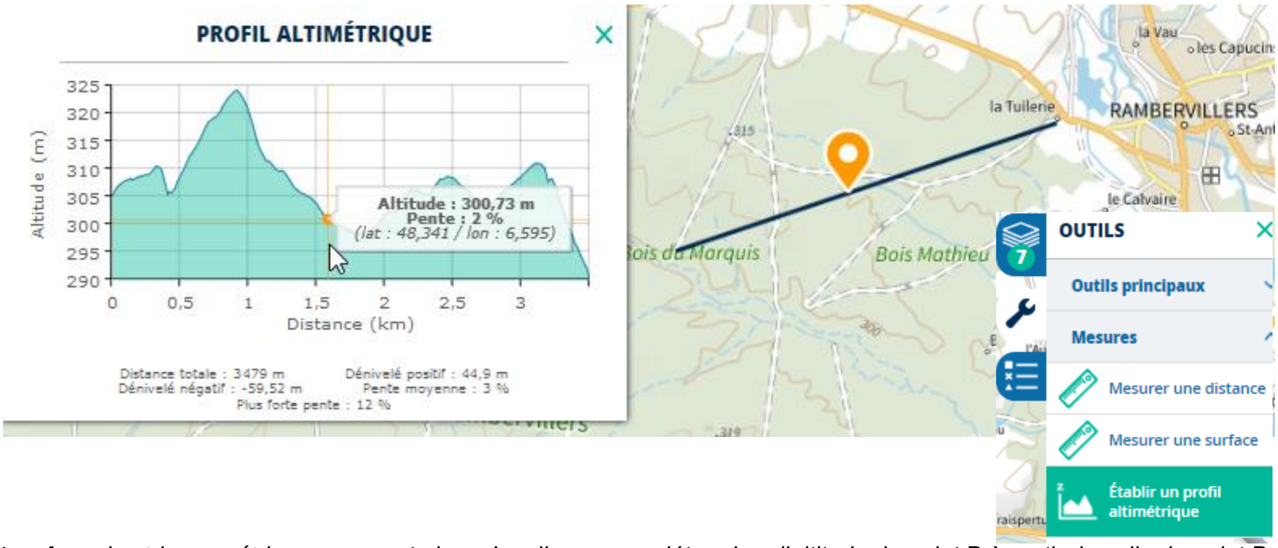
Les mesures angulaires sont en réalité faites à hauteur d'appareil, donc les configurations réelles sont plutôt comme celle-ci-contre : β est obtenu à l'aide d'un appareil de mesure et on en déduit donc $DH = 9{,}5 / \tan(57) \approx 6{,}2$ et donc $EC = 1{,}8 + 6{,}2 = 8$.



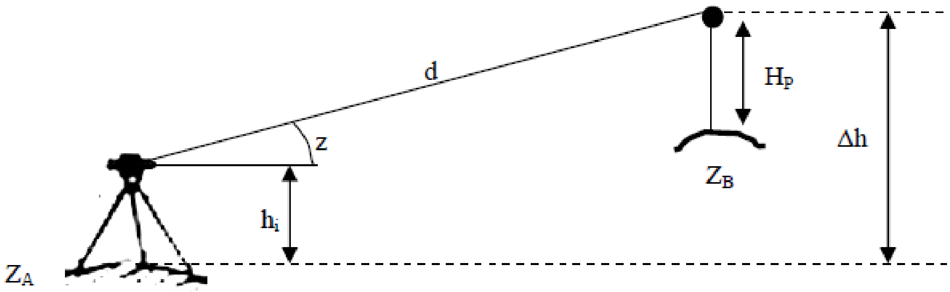
D'autres configurations sont possibles et sont étudiées en fonctions des nécessités techniques, ce qui induit un travail de collaboration indispensable entre enseignants. Le rôle de l'enseignant de mathématiques est d'expliquer et retravailler la détermination de ces mesures en s'appuyant sur des situations concrètes similaires.

Il existe d'autres méthodes qui doivent être mobilisées en fonction des pratiques usuelles locales. En fonction des besoins et **uniquement si cela revêt un intérêt dans les disciplines techniques**, on peut utiliser d'autres relations trigonométriques comme la formule d'Al Kashi, la loi des sinus, ….

GEOPORTAIL donne tous les outils pour appréhender, en visualisant les pentes à l'aide de l'outil « profil altimétrique », le relief afin, par exemple, de déterminer la possibilité de réaliser un chantier.



Les formules trigonométriques peuvent alors s'appliquer pour déterminer l'altitude du point B à partir de celle du point B par la relation : $Z_B = Z_A + h_i + d \sin(z) - H_p$



(https://library.wmo.int/doc_num.php?explnum_id=4721 page 20)

Analyse quantitative du peuplement

Cette partie ne donne lieu à aucun apport nouveau, mais les notions mobilisées sont réinvesties en contexte dendrométrique. Les développements théoriques, permettant d'expliquer les usages professionnels en lien avec les mesures, doivent être réduits à l'essentiel.

- **Configuration de Thalès.**

L'application du théorème de Thalès permet d'estimer les hauteurs des arbres. Le lien avec la conservation des proportions facilite la compréhension des usages en situation.

La croix de bucheron.

Le principe consiste à considérer deux baguettes DG et FH de longueurs égales qui placées près de l'œil et à une distance mesurée (ici 8 m) permettent de voir l'arbre sur la longueur de la baguette verticale.

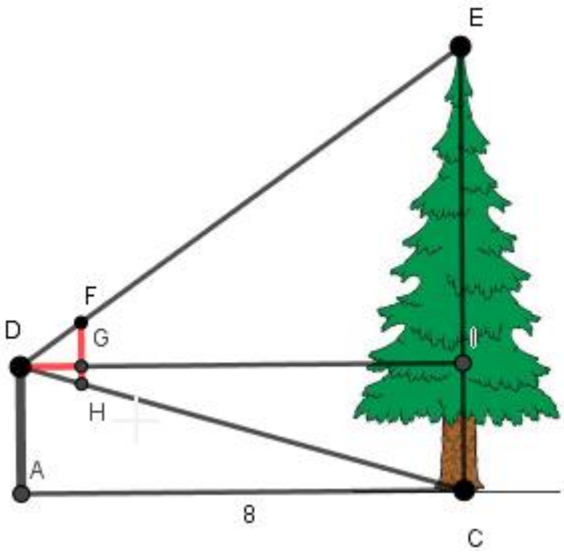
Le théorème de Thalès appliqué au triangle DIE donne

$\frac{DG}{DI} = \frac{FG}{EI}$, soit $EI = FG \times \frac{DI}{DG}$.

De même, le théorème de Thalès appliqué au triangle DIC donne $IC = GH \times \frac{DI}{DG}$.

$$EC = EI + IC = FG \times \frac{DI}{DG} + GH \times \frac{DI}{DG} = FH \times \frac{DI}{DG}$$

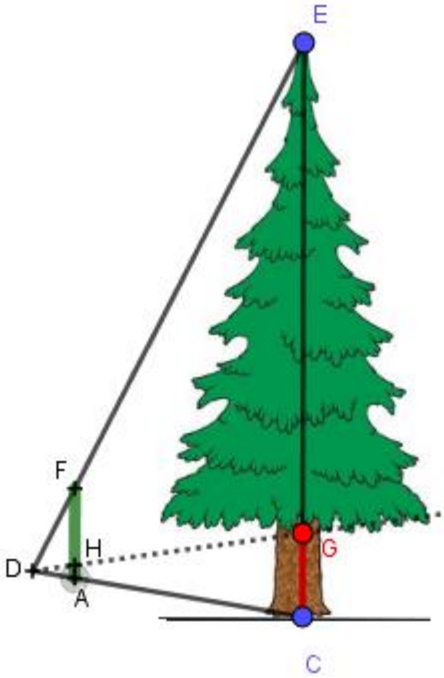
Comme DG = FH, la hauteur EC = DI = AC = 8.



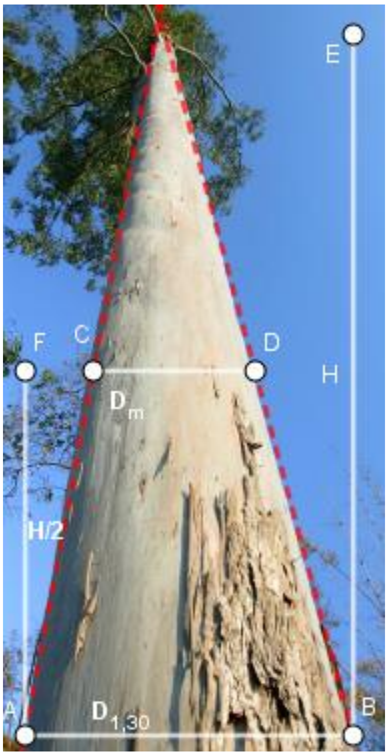
Une variante : la règle graduée ou le report de longueur

Le principe consiste à avoir comme référence une mire ou un objet symbolisé par le segment [GC].

Ainsi, si [GC] est vu avec par exemple une règle graduée ou un objet de longueur HA et que l'arbre est vu sur la longueur du segment [FA]. La relation de proportionnalité $\frac{HA}{GC}=\frac{FA}{EC}$ issue du théorème de Thalès permet de déterminer la hauteur de l'arbre $EC = FA \times \frac{HA}{GC}$. La plus-value de l'enseignement de mathématiques est de justifier cette relation au-delà de l'usage et faire saisir que les mathématiques permettent d'estimer ce qui n'est pas facilement mesurable.



- **Décroissance métrique moyenne (Dmm)**



Le diamètre médian D_m est une mesure essentielle qui permet de réaliser le cubage de bois. Le fait de considérer de manière simplifiée qu'un tronc d'arbre est un cône induit que le diamètre diminue au fur et à mesure que la hauteur augmente et cela en considérant la proportionnalité des accroissements. La hauteur H du bois sur pied étant estimée par une des méthodes développées précédemment, le diamètre $D_{1,30}$ à hauteur 1,30 m étant mesurée et la connaissance de tables de valeur de $Dmm=\frac{D_{1,30}-D_m}{\frac{H}{2}-1,30}$ (« décroissance métrique moyenne » souvent exprimé en cm/m qui traduit « la perte en diamètre ») permet de retrouver le diamètre médian. On peut alors cuber le bois sur pied.

Par exemple, une table donne pour un chêne de $D_{1,30}$ = 45 cm une Dmm de 3,5 (c'est-à-dire que chaque mètre, le diamètre diminue de 3,5 cm). Une estimation de la hauteur H étant de 6 m, on obtient un diamètre médian de

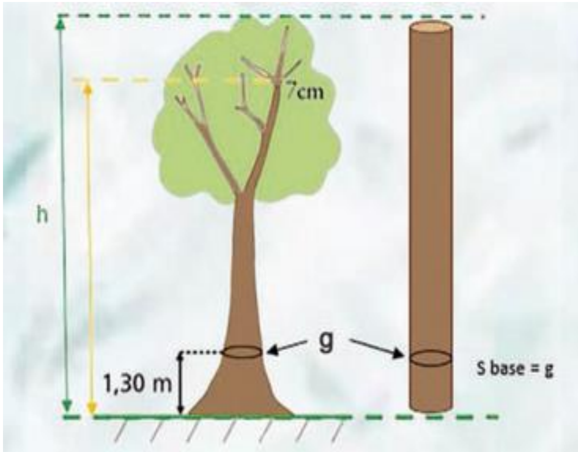
$$D_m = D_{1,30} - Dmm\left(\frac{H}{2}-1,30\right) = 45-3,5(3-1,30) = 39,05 \text{ cm}$$

- **Surface terrière et coefficient de forme.**

La surface terrière (notée g) d'un arbre correspond à la surface du tronc coupé à 1,30 m.

La surface terrière d'un arbre se calcule, à l'aide de la formule de l'aire d'un disque par $g=\pi\frac{d^2}{4}$. L'unité de la surface terrière s'exprime donc en mètres carrés. La surface terrière d'un peuplement sur une parcelle, c'est la somme des surfaces terrières de tous les arbres qui le composent. Pour une série de p mesures de n_i arbres ayant un diamètre d_i, la surface terrière du peuplement est $G=\pi n_1\frac{d_1^2}{4}+\pi n_2\frac{d_2^2}{4}+\ldots+\pi n_p\frac{d_p^2}{4}$. Ramenée à l'hectare (ou à la mesure de la parcelle) et donc exprimée en m²/ha, on peut comparer les mesures et ainsi évaluer la compétition entre les espèces.

La mesure moyenne de la surface terrière d'un arbre est alors $\bar{g} = \dfrac{G}{n_1 + n_2 + ... + n_p}$.



Le coefficient de forme est le rapport entre le **volume commercial** d'une tige marchande et le volume d'un cylindre fictif ayant pour base la section à 1,3m de la tige et pour longueur celle de la tige.
En simplifiant par π/4 au numérateur et au dénominateur, ainsi que la longueur, on retombe sur le rapport des carrés des **diamètres médians** et à 1,3m.
L'intérêt de cette définition visant le volume commercial est qu'il facilite le calcul du coefficient de forme à partir de billes au sol, de la Dmm, et le rapproche des formules de cubage rapide (V = 0,55 D² H pour un feuillu élancé ou V = 0,43 D² H pour un résineux).
Cela renvoit aussi aux équivalences de valeur à 0,7 pour les feuillus et 0,5 pour les résineux.
Volume commercial d'un feuillu élancé
=0,55*Ø²*Hdécoupe = f*g*Hdécoupe, d'où f=0,55/(π/4)=0,7
Volume commercial d'un résineux
=0,42*Ø²*Hdécoupe = f*g*Hdécoupe, d'où f=0,42/(π/4)=0,53

La connaissance de surfaces terrières permet en particulier :

- d'évaluer la compétition entre les espèces. Par exemple, dans une pinède, dès que G < 18 m2 /ha, la lumière au sol devient suffisante pour amorcer la régénération naturelle.
- d'évaluer le volume par ha en utilisant la formule :
  Volume = Coefficient de forme (f) x Surface terrière x Hauteur.
  Par exemple, dans une sapinière adulte de 30 m de haut dont la surface terrière est de 35 m2 /ha, le volume bois fort est de 490 m3 /ha. Le coefficient de forme est 490/(30×35) × 0,467 proche de 0,5 pour les résineux.

Bibliographie :

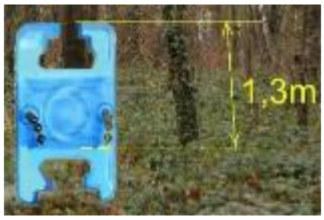
https://www.zimmersa.com/blog-forestier/la-surface-terriere-une-mesure-tres-terre-a-terre-n134

https://www.zimmersa.com/blog-forestier/la-dendrometrie-ou-les-mathematiques-du-forestier-n75

- **Le relascope.**

C'est un outil qui permet de mesurer la surface terrière à partir du recensement d'arbres.





Le principe, basé sur les propriétés des triangles semblables, donc du théorème de Thalès, est le suivant :

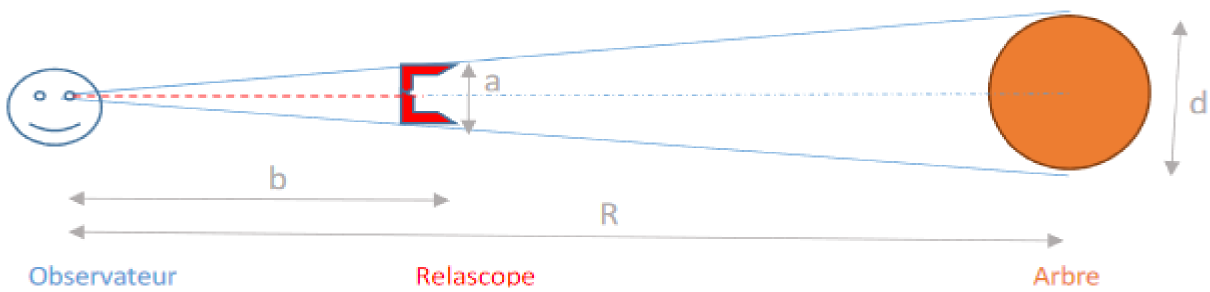
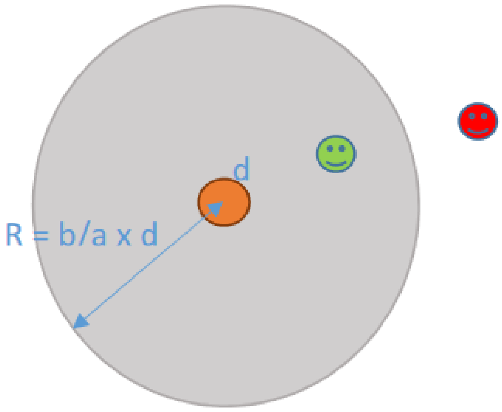
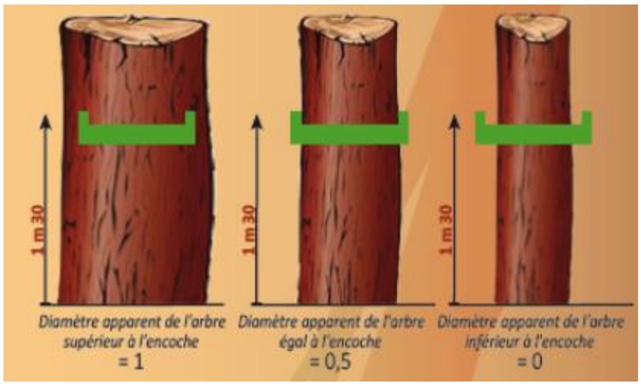


Schéma de visée pour un arbre dont le diamètre apparent est égal à la largeur de l'encoche

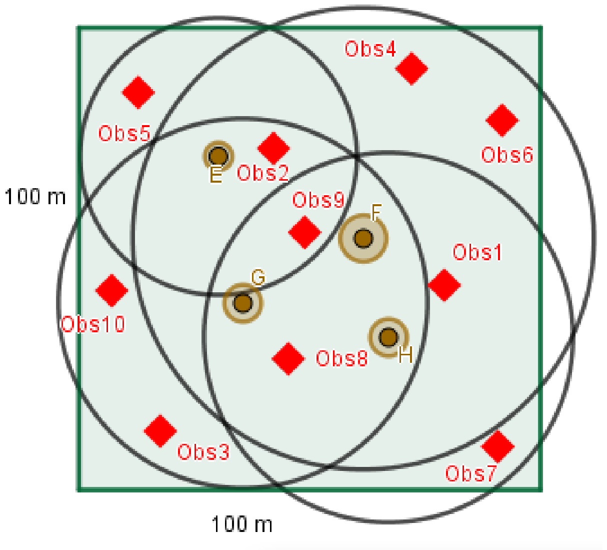
Le principe des triangles semblables (proportions) montre que : b/a = R/d
Soit : R = b/a x d ou encore R = k x d où k est une constante qui ne dépend que des proportions de la chainette et de l'encoche du relascope. La valeur usuelle de b/a est 50/1, soit 50, dont la justification sera donnée ultérieurement.
D'où **d = R/50**
R est donc directement proportionnel au diamètre de l'arbre. Un arbre aura son diamètre apparent égal à la largeur de l'encoche si l'observateur est à cette distance R de lui. Le diamètre apparent paraîtra supérieur à la largeur de

l’encoche si l’observateur est dans le cercle de rayon R, l’arbre sera alors comptabilisé. Au contraire, il ne sera pas pris en compte si l’observateur est hors de ce cercle, car le diamètre apparent paraîtra plus petit que l’encoche.





Pour comptabiliser l’arbre, il faut être à l’intérieur d’un cercle centré sur l’arbre et de rayon 50 fois d (le diamètre de l’arbre), si bien que la surface du disque (gris) correspondante est $\frac{\pi R^2}{\pi(d/2)^2}$ plus grande que la surface du tronc, soit



$\frac{\pi R^2}{\pi(d/2)^2} = 4\left(\frac{R}{d}\right)^2 = 4\times 50^2 = 10000$ plus grande que la surface du tronc. 10000 m² = 1 ha explique cette valeur de 50.
La surface totale de tous ces disques, pour tous les arbres de la forêt, est donc 10 000 fois la surface terrière.
Le schéma ci-contre représente une parcelle de 1 ha, avec quatre arbres (E, ∅ = 0,6m), (F, ∅ = 1m), (G, ∅ = 0,8m), (H, ∅ = 0,8m). Les troncs ont été grossis pour être visibles et ne sont pas à l’échelle mais les grands cercles le sont. La situation est volontairement artificialisée du point de vue de la densité d’arbres, mais c’est pour éclairer pédagogiquement le propos.
Tous ces disques se chevauchent en général.
Il faut maintenant expliquer comment à partir d’un simple comptage on peut déterminer la surface terrière. Il y a deux éléments :

- Pour chaque observation, on compte à combien de disque(s) elle appartient. Ainsi la moyenne de ces comptages supposés basés sur des points d’observations aléatoires donne le taux de recouvrement de l’ensemble des disques. La valeur des diamètres des arbres est indirectement prise en compte par le fait que plus il est grand, plus le disque est grand, plus la probabilité d’être compté est grande. Par exemple, pour 10 observations : les observations 3&4&5&6&7&10 appartiennent à un disque (6*1 = 6 comptages), l’observation 1 appartient à deux disques (2 comptages), les observations 2 et 8 à trois disques (2*3 = 6 comptages) et l’observation 9 à quatre disques 4 comptages). Cela fait donc 6+2+6+4 = 18 comptages, soit une moyenne de 1,8 comptage. Donc la somme de la surface des grands disques est 1,8 fois plus grande que la parcelle, elle est donc de 1,8 ha =18 000 m².
- Or la superficie totale des grands disques est 10 000 fois plus grande que la surface terrière, donc la surface terrière est 1,8 m²/ha.

Calculons pour vérifier la surface terrière sur cette parcelle de 1 ha :

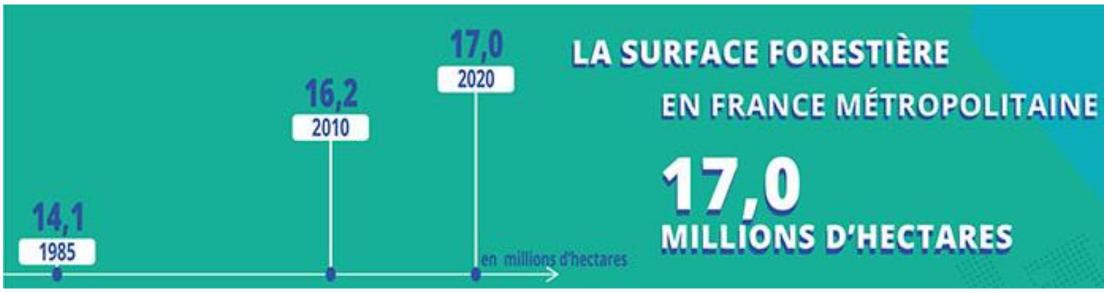
$G = g_E + g_F + g_G + g_H = \pi \times \left(\frac{0,6^2}{4} + \frac{0,8^2}{4} + \frac{0,8^2}{4} + \frac{1^2}{4}\right) \approx 2\,\text{m}^2$, on retrouve une valeur assez proche. Ainsi il faut multiplier la moyenne des comptages pour obtenir une estimation de la surface terrière.
En situation réelle avec une plus grande densité et plus d’observations, les relevés statistiques donnent une plus grande fiabilité des résultats puisqu’une probabilité est la valeur limite de grandeurs relevées (dans les mêmes conditions) sur un « grand » échantillon statistique.

Bibliographie :
https://draaf.grand-est.agriculture.gouv.fr/IMG/pdf/Surface_terriereV4_cle87147a.pdf
https://www.zimmersa.com/blog-forestier/la-surface-terriere-une-mesure-tres-terre-a-terre-n134
https://images.math.cnrs.fr/Le-relascope.html

- **Du côté des automatismes.**

La pratique des automatismes vise à privilégier le sens des opérations, calculs de proportions et pourcentages, équations de droites, représentations graphiques, calculs statistiques. Un réinvestissement des notions en lien avec la manipulation de ces grandeurs (surface et volume, unités et conversion, ...) permet de consolider leur acquisition.
L'entraînement à la manipulation de formules en fonction des contextes professionnels permet d'automatiser de nombreux calculs.
Les exemples suivants ne sont là que pour illustrer l'importance de cette pratique et ne sauraient être en aucun cas exhaustifs :

- Estimer la surface forestière en 2030 à partir de cette infographie :

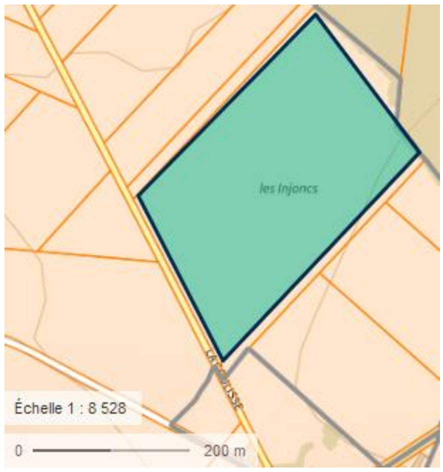


- Des élèves ont mesuré sur une parcelle les diamètres de deux essences d'arbres

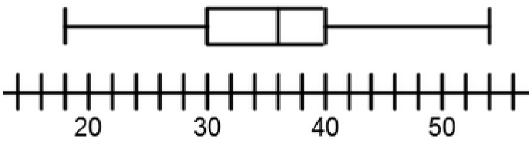
Classes de diamètre	**15**	**20**	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**	**50**	**55**	**60**	**65**	**70**	**75**	**80**
Chêne	21	25	23	23	34	48	26	11	5	1	2	3	1	2
Châtaignier	4	6	5	11	21	16	14	8	2					

Calculer pour chacune le diamètre moyen

- La formule d'Algan est une formule de cubage rapide. Elle permet une estimation rapide pour des grumes comprises entre 4 et 12 mètres de hauteur. $V = \frac{d^2}{2}(h+2)$ avec *d* diamètre a 1,30m, *h*: hauteur a la découpe; *V*: volume en m^3. Estimer le volume d'une grume de 80 cm de diamètre et de 6 m de long en utilisant cette formule.
- A l'aide de l'échelle disponible sur le plan issu de Geoportail, estimer la surface de la parcelle « les Injoncs » ci-contre.



- « *17 millions d'hectares de forêt couvrent la France et représentent 30 % de l'Hexagone. La forêt française est composée aux 2/3 de feuillus biens répartis sur le territoire, mais aussi de 3,2 Mha de résineux et 1,8 Mha de zones mixtes. La France reste le pays du chêne par excellence avec 5,5 Mha, soit 41 % de la surface forestière* »
  Source :https://www.fnbois.com/foret-et-mobilisation-du-bois/chiffres-cles/
  - Déterminer la superficie représentée par les feuillus
  - Déterminer le pourcentage que représente les résineux
  - Déterminer le pourcentage que représente les chênes parmi les feuillus »
- Une tronçonneuse, après avoir subi une baisse de 10% coûte 261 €. Déterminer le prix avant réduction.
- On donne le diagramme en boite suivant, résultat d'un sondage sur un échantillon de 1000 personnes auxquelles on a demandé leur âge.
  - Donner l'étendue de cet échantillon
  - Donner la médiane de cet échantillon.
  - Donner le pourcentage de personnes de cet échantillon dont l'âge est inférieur à 40 ans.



- Le prix d'un objet augmente de 12%.
  Donner le coefficient multiplicateur à appliquer à ce prix afin d'obtenir le prix après augmentation.

Bibliographie :

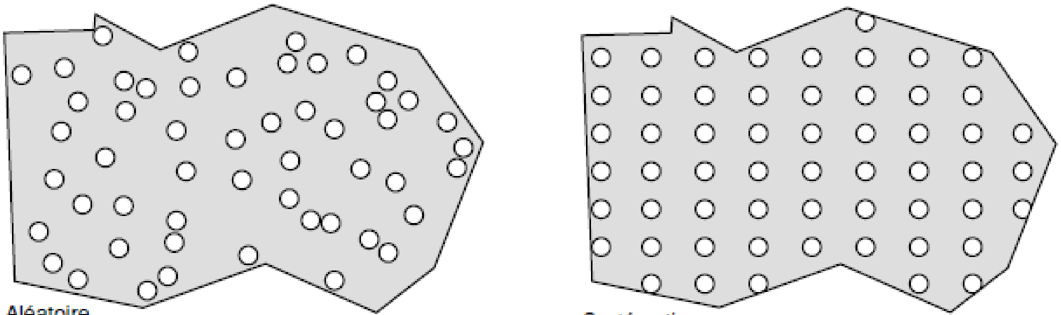
http://www.sylvaingaudin.fr/PDF/Dendro.pdf
https://hal.archives-ouvertes.fr/cirad-00147247/

Principes d'inventaires

En gestion forestière, il existe différents types d'inventaires :

1. Inventaire pied à pied (méthode exhaustive)
2. L'inventaire typologique (on constate que ce sont essentiellement des peuplements irréguliers ou régularisés qui font l'objet de typologie. Ce sont en effet ces peuplements qui posent des problèmes de description et de gestion d'où leur étude.)
3. L'inventaire statistique par placettes temporaires, placettes à usage unique car elles ne sont pas matérialisées sur le terrain.

Toute la difficulté consiste à savoir dans quelle mesure les résultats obtenus sont fiables et peuvent décrire convenablement l'ensemble des peuplements. Pour cela, on fait appel aux lois de la statistique d'où le nom d'*inventaire statistique* (ou *inventaire par échantillonnage*).
L'**échantillonnage aléatoire**, qui correspond à une détermination purement au hasard de la localisation des placettes, est très rarement utilisé.
En revanche, l'**échantillonnage systématique** l'est couramment pour les inventaires statistiques.



Aléatoire — Systématique

Pour mettre en place les placettes, il suffit :
- de calculer la densité des placettes (par exemple 1 placette tous les deux hectares),
- de tracer sur papier calque, à la même échelle que la carte de la forêt un quadrillage correspondant à la répartition en carré des parcelles,
- de poser le quadrillage sur la forêt et de l'ajuster au mieux. Chaque intersection du quadrillage détermine l'endroit où sera installée une placette.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2	1	C	C	C	C	B	B	C	B	C	C	C	B	C	C	C	C	C	C
3	2	C	B	C	C	C	B	C	C	B	C	C	B	C	C	B	C	C	C
4	3	C	C	B	C	C	C	C	B	B	B	C	C	C	C	B	C	C	B
5	4	B	C	C	C	B	B	C	C	C	C	B	C	C	B	B	C	C	C
6	5	C	C	C	C	B	C	C	C	B	C	B	C	C	C	C	C	B	C
7	6	C	B	B	C	B	B	B	C	B	C	C	C	C	C	C	C	B	C
8	7	B	C	C	C	B	B	C	C	B	C	B	C	C	B	C	C	C	C
9	8	C	C	C	B	C	C	C	C	B	C	B	C	C	C	C	C	C	C
10	9	B	B	C	B	C	C	C	C	C	C	B	C	B	B	B	C	C	C
11	10	B	B	B	C	C	C	B	C	C	B	C	C	C	C	C	C	C	C
12	11	C	C	C	C	B	C	B	B	B	C	C	B	C	C	C	B	C	B
13	12	C	C	C	C	C	B	C	C	B	C	C	B	B	B	C	B	C	C
14	13	C	B	C	B	C	C	C	C	B	B	B	B	C	C	C	C	C	B
15	14	C	C	C	B	C	C	C	B	C	C	B	C	C	C	B	C	B	B
16	15	B	B	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
17	16	C	B	C	C	B	C	C	B	C	C	C	B	B	C	B	C	C	C
18	17	C	C	C	C	C	B	C	B	C	B	C	B	C	B	B	B	C	B
19	18	C	C	C	B	B	C	B	C	C	C	C	B	C	B	C	B	C	C

L'enseignement des mathématiques est l'occasion de montrer que ces deux types d'échantillonnages donnent les mêmes répartitions sur les essences. Pour cela, on peut par exemple simuler au hasard la répartition d'essences au tableur grâce à la fonction :

=SI(ALEA.ENTRE.BORNES(1;10)<=7;"C";"B")

qui simule la présence à 70% de l'essence C, contre 30% de l'essence B.
Pour un échantillonnage systématique, on compte les essences représentées au centre de la placette et on obtient 67% pour l'essence C, ce qui est assez proche. La répétition doit faire converger vers la valeur théorique de 70%.

Dans le cas d’un échantillonnage aléatoire, il faut faire un tirage aléatoire, par exemple choisir deux entiers aléatoires entre 1 et 18 et opérer de même. Si on ne compte qu’une fois les doublons, dans ce cas on obtient 66% de l’espèce C.

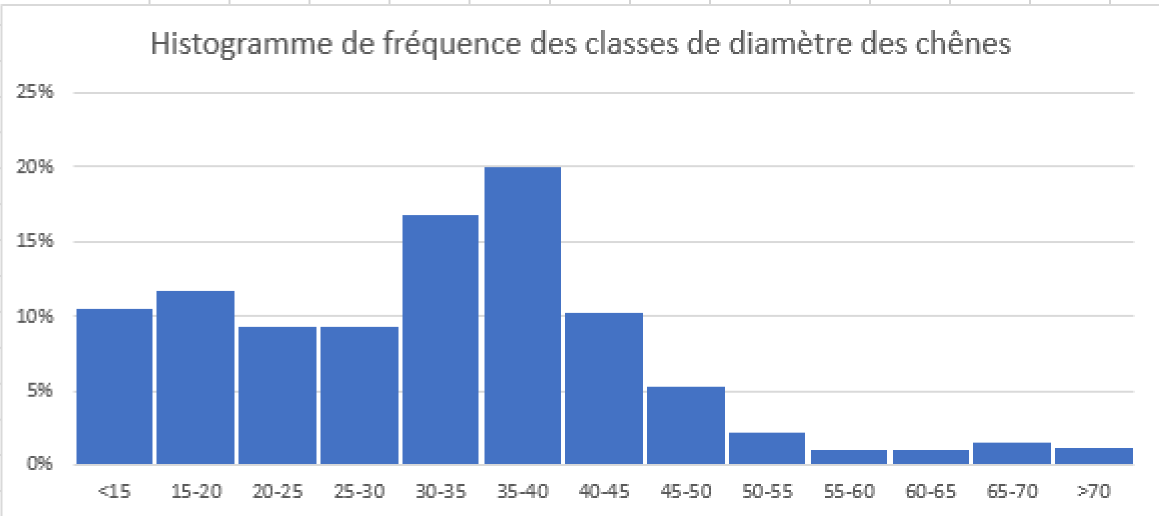
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18		Tirage (x,y)				
2	1	B	C	C	C	C	C	C	B	C	C	C	B	C	C	B	B	B	B		11	16		12	10
3	2	C	C	C	C	B	B	C	C	B	C	C	B	C	C	C	B	B	C		3	17		2	8
4	3	B	B	B	C	C	C	B	C	B	C	B	C	B	C	C	C	C	B		6	17		8	6
5	4	C	B	C	B	C	C	C	C	B	C	C	B	B	C	C	C	C	C		7	13		17	14
6	5	B	C	C	B	C	B	B	B	B	C	C	C	C	C	C	C	C	C		15	6		4	3
7	6	C	B	C	C	C	C	C	C	C	B	C	C	B	C	C	C	B	C		16	9		11	7
8	7	B	B	B	B	C	B	C	C	C	C	C	C	C	B	B	B	B	C		1	11		17	8
9	8	B	C	C	C	C	C	B	C	B	C	C	C	C	C	B	C	B	B		16	6		9	15
10	9	B	C	C	C	B	B	B	C	C	C	B	B	B	C	C	B	C	C		5	8		2	9
11	10	C	C	C	C	C	C	B	C	C	C	B	B	C	B	C	C	C	C		7	16		13	10
12	11	B	C	B	C	B	B	C	C	C	B	C	B	C	C	C	C	C	C		11	4		5	1
13	12	B	B	C	C	C	C	C	C	B	C	C	C	C	B	C	B	C	C		2	12		14	7
14	13	C	C	C	C	C	C	C	C	B	C	C	B	B	C	B	C	C	C		9	8		2	7
15	14	C	C	C	C	C	C	B	C	B	B	C	B	B	C	B	C	C	C		6	18		8	7
16	15	B	C	B	B	B	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	B	C	C		2	18		8	13
17	16	C	C	B	C	C	B	B	C	B	C	C	B	C	C	C	B	C	C		13	12		7	17
18	17	C	B	B	C	C	B	B	B	C	C	C	C	C	C	C	B	C	C		2	14		11	15
19	18	C	C	B	B	C	B	C	C	B	C	B	B	B	B	B	B	C	C		12	5		11	16

La stratification est un caractère courant des populations dans la nature. Dans une forêt par exemple les meilleurs sites se trouvent habituellement le long des pentes basses tandis que les sites les plus pauvres se trouvent le long des crêtes. Si l’on en tient compte, la stratification peut servir à accroitre l’efficacité de l’échantillonnage. En pratique, les équipes d’inventaire tiennent compte de la stratification en asseyant les bandes, ou les lignes de placettes, perpendiculairement à la direction générale des vallées, c’est-à-dire en traversant les strates.

Une fois identifié le type d’inventaire choisi, la mise en place des placettes sur le terrain lors d’un TP est indispensable. Cela permet de consolider d’une part les automatismes de calculs sur les aires par exemple (choix de placette carrée, rectangulaire ou circulaire) et de travailler sur un caractère (densité, surface terrière, volume, etc..) mais également de mettre en pratique le principe d’échantillonnage.

A l’aide des relevés, par exemple, de diamètre de chênes, des représentations par classes sous la forme d’un histogramme de fréquences permettent de travailler la notion de probabilité pour aller vers la notion de distribution d’une loi continue :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Classes de diamètre	<15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	>70
2	Chêne	73	81	64	64	116	139	71	37	15	7	7	11	8
3	Fréquence	11%	12%	9%	9%	17%	20%	10%	5%	2%	1%	1%	2%	1%



Peu de grandeurs dendrométriques suivent une loi normale, il faut donc y préférer l'utilisation de cette loi continue dans le cadre de calcul de probabilité en lien avec les grandeurs usuelles (taille, poids, dimensions d'un objet fabriqué, …). On peut s'appuyer là aussi sur des histogrammes de fréquence et introduire la loi normale comme la distribution dans le cas d'intervalles « très petits » et en faisant le lien avec le calcul intégral vu au lycée.

Traitement des données

Même si son apprentissage demande un certain investissement, le logiciel **R** fournit un grand nombre d'outils permettant de répondre à de nombreuses demandes, en particulier de travailler avec des données provenant de véritables expérimentations, de générer de façon efficace des simulations.

- **Contextualisation des différentes lois de probabilité**

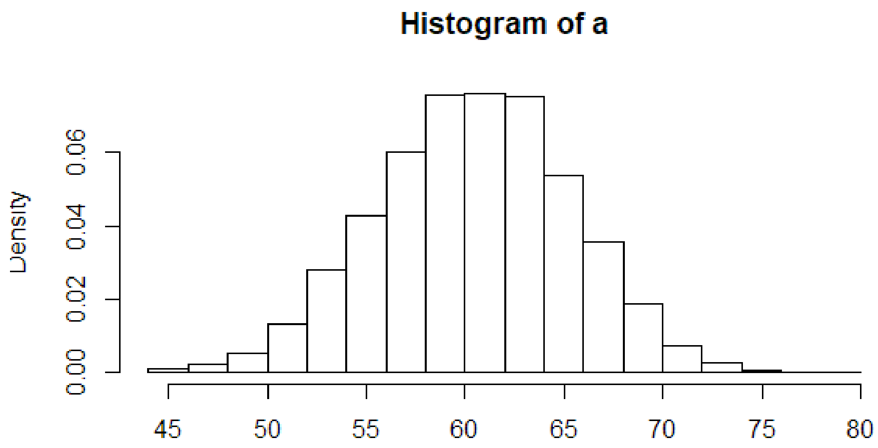
« ***Les essences feuillues*** *sont largement majoritaires malgré la montagne vosgienne. Elles représentent 61 % des bois lorrains et alsaciens.* » https://grandest.cnpf.fr/le-cnpf-et-la-foret-privee/la-foret-regionale/la-foret-du-grand-est

Ce type de situation, à adapter naturellement en fonction des contextes, peut être un fil rouge pour introduire de manière simplifiée l'ensemble des notions de probabilités et statistiques inférentielles et leur donner du sens.

La valeur de 61% ayant été établie, elle sert de référence théorique dans le cadre d'un échantillonnage.
Une première approche consiste à simuler, dans les bois alsaciens ou lorrains, le choix au hasard de 100 arbres sous la forme d'un tirage avec remise pour lesquels on s'attend à une proportion de feuillus de 61%. On est dans le cadre d'une loi binomiale de paramètres n = 100 et p = 0,61. La fonctionnalité `rbinom` du logiciel R permet de faire plusieurs simulations et de représenter cela sous forme d'histogramme de fréquence.

```
#simulation loi binomiale

a=rbinom(5000,100,0.61) # simulation de 5000 répétitions du choix
                        # de 100 arbres avec une probabilité de 0.61
                        #d'être un feuillu
hist(a,nclass=20,prob=T)# histogramme des fréquences avec 20 classes
```

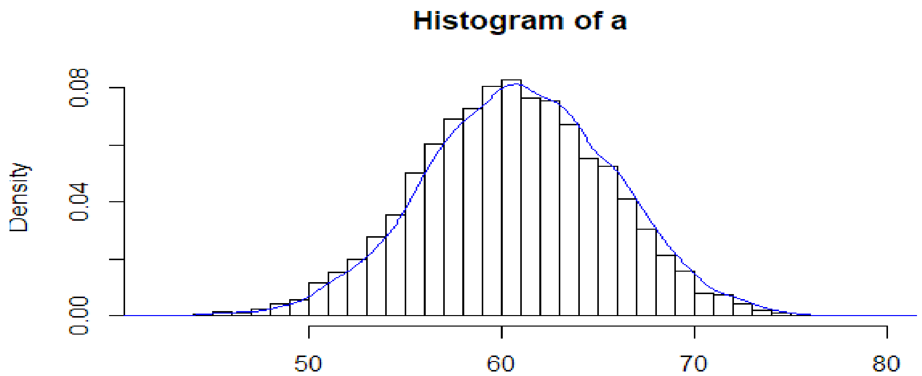


Plusieurs constats à ce stade :

- Ce n'est pas parce que la probabilité théorique est de 0,61, que lors d'un échantillonnage de 100 arbres, 61 exactement seront des feuillus. Il existe une variation appelée « fluctuation d'échantillonnage ».
- Cette fluctuation se répartit de façon symétrique autour de la moyenne théorique qui semble bien être de 61.
- La forme de la courbe de densité théorique dans le cas de « très petits intervalles » semble bien être aussi celle d'une distribution normale.

```
#simulation loi binomiale et densité

a=rbinom(10000,100,0.61)# simulation de 100000 répétitions du choix
                        # de 100 arbres avec une probabilité de 0.61
                        #d'être un feuillu
hist(a,nclass=50,prob=T)# histogramme des fréquences avec 50 classes
lines(density(a), col='blue')  # courbe de densité
```



Cette fluctuation d'échantillonnage constatée, se pose la question de décider la fourchette acceptable de fluctuation, appelée intervalle de fluctuation. Ce dernier représente par convention 95% des résultats obtenu lors d'une simulation, c'est-à-dire que l'on cherche à recenser l'intervalle, centré autour de la moyenne (ici 61), contenant 95% des résultats. Le logiciel **R** donne une réponse efficace à l'aide de la fonction **`quantile`** :

```
quantile(a,c(0.025,0.5,0.975))
```

Les résultats sur deux simulations permettent d'établir qu'environ 95% du nombre de feuillus lors d'un recensement de 100 arbres appartient à l'intervalle [51 ;71] (si l'on veut avoir un intervalle centré autour de la moyenne 61):

```
> quantile(a,c(0.025,0.5,0.975))
 2.5%   50% 97.5%
   51    61    71
```

```
> quantile(a,c(0.025,0.5,0.975))
 2.5%   50% 97.5%
   51    61    70
```

De cette constatation, les modèles théoriques de la loi normale ou la loi de Student peuvent être développés en évoquant les quantiles de référence notés $t_{\alpha/2}$ permettant d'obtenir l'intervalle de fluctuation au niveau de confiance 1 – α d'une fréquence pour un échantillon de taille n.

- **Vers l'intervalle de confiance en situation**

L'intervalle de fluctuation d'une fréquence permet de comprendre que si l'on suppose connue une probabilité théorique d'apparition d'un phénomène, les issues relevées lors d'un échantillon apparaissent avec une fréquence dans un tel intervalle, dans 1 - α % des cas. Mais dans la réalité cette probabilité n'est pas toujours connue et c'est un questionnement que de déterminer, à partir d'échantillons, une estimation de la probabilité d'apparition d'un phénomène. Sur un exemple, on peut comprendre que les rôles de *f* et *p* peuvent être symétriques :

Parmi 900 arbres relevés dans un bois des Vosges, on a observé 495 feuillus. Entre quelles limites peut-on situer la proportion des feuillus dans ce bois ?

Si *p* est la proportion inconnue des feuillus, lorsqu'on choisit un arbre, la probabilité pour qu'il soit feuillu est *p*.
Si le nombre d'arbres dans le bois est très élevé, choisir 900 arbres revient à répéter 900 fois la même expérience. Dans ces conditions, le nombre de feuillus que l'on peut observer est une variable aléatoire de loi B(900, p) que l'on peut approcher par une loi N(900p, 900p(1 − p)), p étant de l'ordre de 495/900 = 0,55.

La variable X, proportion des feuillus sur 900 arbres, obéit donc approximativement à une loi normale $N\left(p, \frac{p(1-p)}{900}\right)$ car np ≥ 5 et n(1-p) ≥ 5 en considérant p ≈ 0,55 .
On a observé la valeur *f* = 495/900 = 0,55. Pour un niveau de confiance de 95%, on peut considérer que :

$p-1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{900}} \le 0,55 \le p+1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{900}}$, soit $0,55-1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{900}} \le p \le 0,55+1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{900}}$

Si l'on cherche à résoudre de façon exacte l'inéquation précédente,

$$0,55-1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{900}} \le p \le 0,55+1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{900}} \Leftrightarrow -1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{900}} \le p-0,55 \le 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{900}}$$

$$(p-0,55)^2 \le 3,8416\frac{p(1-p)}{900} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow 0,51735 \le p \le 0,58222$$

p étant assez proche de *f* , on déduit de $\underbrace{0,55}_{=f}-1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{900}} \le p \le \underbrace{0,55}_{=f}+1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{900}}$, et en assimilant *p* à *f*,

$f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{900}} \le p \le f + 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{900}}$, ce qui donne en application numérique supposant $0{,}5174 \le p \le 0{,}5825$, résultat très proche de l'encadrement issu de la résolution exacte.
Ainsi cela permet d'illustrer le fait qu'un intervalle de confiance au niveau de confiance 1 – α se détermine à l'aide des estimations ponctuelles de la moyenne $\bar{x}$ et de l'écart-type s d'un échantillon de taille *n* par la formule :

$$I_c = \left[\bar{x} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

- **Application aux relevés**

Lors d'un inventaire statistique, on peut mesurer ou calculer sur chaque placette un certain nombre de variables (densité, volume, surface terrière, densité de semis, pourcentage d'essences, taux de gélivure...). On cherche à savoir en quoi la moyenne obtenue sur l'ensemble des placettes pour chacune de ces variables est représentative de l'ensemble de la forêt.
Pour chaque variable, on peut calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type s des n relevés mais également l'erreur relative $E_r = \frac{t_{\alpha/2} s}{x\sqrt{n}} = \frac{t_{\alpha/2} C_v}{\sqrt{n}}$, où C_v est le coefficient de variation (rapport entre écart type et moyenne), $t_{\alpha/2}$ est le quantile de la variable de Student pour un niveau de confiance de 1 - α, pour de petites valeurs de *n* et si $n \ge 30$, on utilisera la loi normale en prenant 1.96 pour un intervalle de confiance à 95%. Cette erreur relative traduit la fiabilité des résultats. Plus elle est faible, plus les moyennes obtenues sont fiables. Elle sert à calculer l'intervalle de confiance dans lequel on a 95 % de chance de se trouver puisque $I_c = \left[\bar{x} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right] = \left[\bar{x}(1-E_r) ; \bar{x}(1+E_r)\right]$

On obtient parfois avec des inventaires statistiques sur de grandes forêts de meilleurs résultats qu'avec un inventaire pied à pied.

Taux échantillonnage $\tau = \frac{N \times S}{A}$ (*A* surface massif à inventorier, *S* Surface des placettes, *N* nombre placettes)

On déconseille de passer en inventaire statistique quand le taux d'échantillonnage dépasse 10 %.
Lorsqu'on veut mettre en place un inventaire statistique, il faut déterminer à l'avance le nombre de placettes en fonction de l'erreur relative qu'on souhaite ne pas dépasser. Pour cela, on utilise la formule donnant l'erreur relative et on obtient

Seuil de probabilité	ε (en %)	CV (en %) 60	80	100	150	200
0.05	5	553	983	1537	3457	6146
	10	138	246	384	864	1537
	20	35	61	96	216	384
0.10	5	390	693	1082	2435	4329
	10	97	173	271	609	1082
	20	24	43	68	152	271
0.20	5	237	420	657	1478	2628
	10	59	105	164	370	657
	20	15	26	41	92	164
0.32	5	142	253	396	890	1582
	10	36	63	99	223	396
	20	9	16	25	56	99

TAB. 1.1 – *Taille de l'échantillon en fonction du seuil de probabilité α, de la précision voulue ε_s et du coefficient de variation CV_{gs}.*

$$E_r = \frac{t_{\alpha/2} C_v}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow n = \left(\frac{t_{\alpha/2} C_v}{E_r}\right)^2$$

Par exemple, pour un seuil de probabilité de 10%, $t_{\alpha/2} = 1{,}645$, d'où pour $C_v = 80$ et une erreur de 5%,

$$n = \left(\frac{t_{\alpha/2} C_v}{E_r}\right)^2 = \left(\frac{1{,}645 \times 80}{5}\right)^2 \approx 693$$

Il faut toutefois connaître le coefficient de variation pour calculer le nombre de placettes. On peut soit mettre en place un certain nombre de placettes sur le terrain et calculer un *Cv* provisoire, soit se référer aux valeurs usuelles suivantes : (N nombre d'arbres, surface terrière, H_0 hauteur totale, V volume)

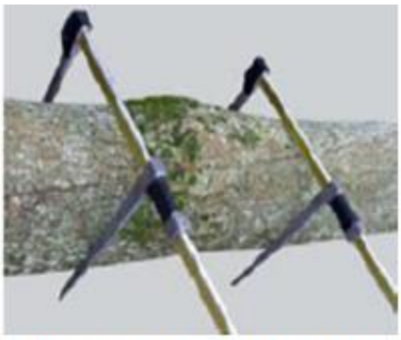
	N	G	Ho	V
Structure régulière	30 %	20-30 %	5-10 %	5-10 %
Structure irrégulière	40-50 %	40-50 %	-	40-50 %

- **Calcul de volume de bois abattu.**

Les calculs ne donnent lieu à aucun apport de connaissances nouvelles, mais nécessitent une pratique régulière, en particulier dans l'esprit des « automatismes », sur des situations en lien avec les enseignements techniques afin que le manque d'aisance calculatoire et le sens des opérations ne soient plus un frein à la pratique professionnelle:

<u>Liste non exhaustive de situations</u> :

- **Calcul de diamètre médian, comme la moyenne de deux mesures en cas d'irrégularité de la grume.**



Photos 3 : Mesurage des diamètres en cas d'excroissance

Situation 1

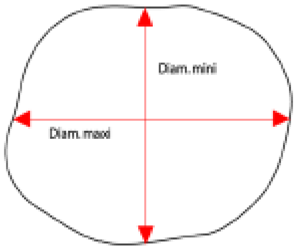


Figure 3 : Mesurage des diamètres en croix sur une pièce méplat à l'endroit du diamètre médian

Situation 2

C'est l'occasion de travailler des techniques de calcul mental qui apportent du confort sur le chantier.

- **Taux d'écorce, coefficients d'écorce.**

Suivant les bois, l'épaisseur d'écorce n'est pas la même et cela a un impact sur le volume commercial. L'objectif de l'enseignement de mathématiques est d'expliquer les formules du type :

volume sous écorce = volume sur écorce x (1 – taux écorce)

Ces indicateurs sont donnés sous forme de tableaux dans lesquels il faut extraire la bonne information.

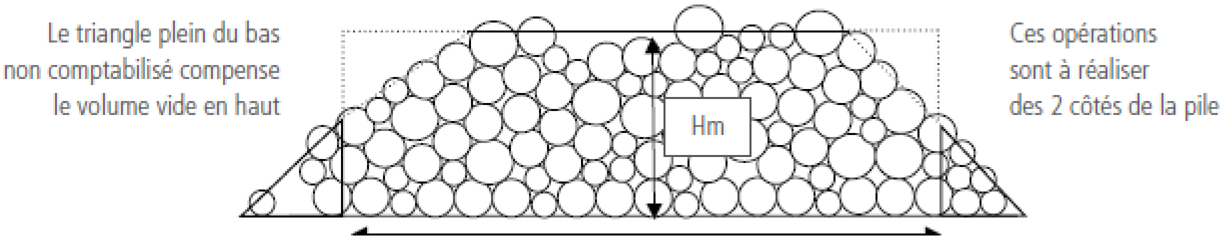
Taux d'écorce dans les grumes selon l'essence et le volume unitaire (%)

Volume unitaire (m^3)	0,5 m^3	1 m^3	1.5 m^3	2 m^3	3 m^3
Classe de diamètre à 1,3 m (cm)	25-30	35-40	40-45	45-50	55-60
Epicéa	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0
Sapin	11,0	11,0	11,0	11,5	11,5
Douglas	14,5	14,5	14,5	14,5	
Pin sylvestre	18,0	16,0	14,5	14,0	12,0

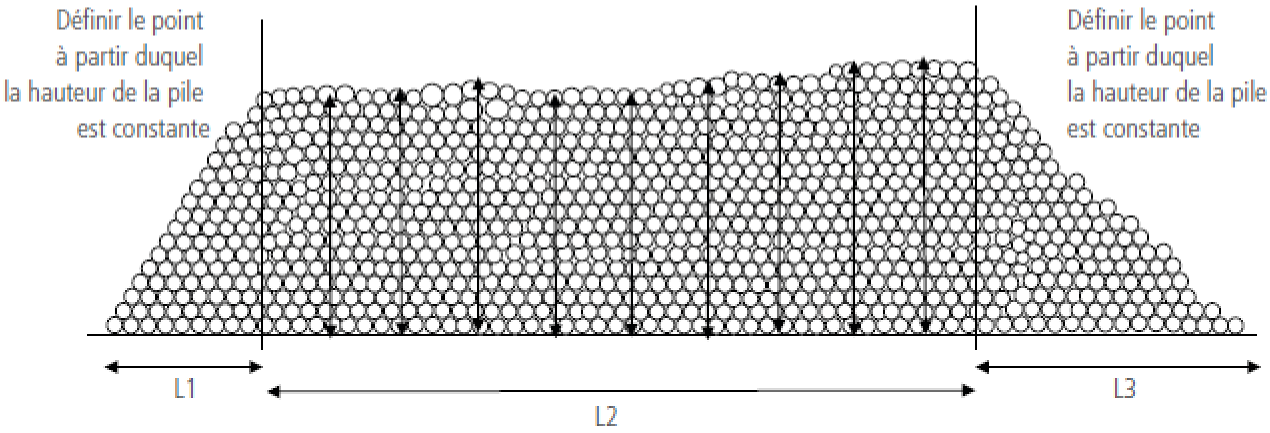
La manipulation d'autres indicateurs (**masse volumique brute** = masse brute/volume avec écorce, **Taux d'écorce massique** = (volume d'écorce réel à l'entrée de l'usine/volume sur écorce), **Taux siccité** = (masse de matière sèche/masse brute), mètres cubes apparents ,…) font appel aux mêmes habiletés.

- **Volume de piles de bois**

Dans un premier temps, pour des « petites » piles de bois, on estime le volume du pavé équivalent à la pile de bois. Le rôle de l'enseignant de mathématiques est d'expliquer la légitimité des formules de calcul.



Puis on prolonge cela à de « grandes » piles pour lesquelles on a mesuré la hauteur jugée constante.



Volume (M3A) = [L1 (m)/2 + L2 (m) + L3 (m)/2]* longueur commerciale des pièces (m)* Hm (m)

$$\text{Avec Hm (m)} = \frac{\text{moyennes hauteurs devant} + \text{moyennes hauteurs dernières}}{2}$$

Là encore le calcul mental est un gage d'efficacité en extérieur. On peut alors y adjoindre les coefficients d'empilage.

Biblio :

https://www.fcba.fr/wp-content/uploads/2020/11/fcbainfo-2019-22-1eretransformation-approvisionnement-cubage-bois-ronds-assimiles-norme-professionnelle-nfb.53-020-vuillermoz-geny.pdf

https://www.onf.fr/outils/long-reads/2c595110-e549-47be-8e51-681661aba57e/++versions++/23/++paras++/3/++ass++/10/++i18n++data:fr?_=1550581603.788674&download=1

http://xylofutur.fr/wp-content/uploads/2014/02/Memento-2017.pdf

https://www.onf.fr/+/16a::rendez-vous-techniques-de-lonf-no-39-40.html (page 60 et suivantes)

- **Du côté des automatismes, exemples de « questions flash ».**

La pratique des automatismes vise à privilégier ici le sens des opérations, calculs de proportions et pourcentages, la manipulation de ces grandeurs et les manipulations de formules en fonction des contextes professionnels permet d'automatiser de nombreux calculs.

Les exemples suivants ne sont là que pour illustrer l'importance de cette pratique et ne sauraient être en aucun cas exhaustifs :

- Estimer le volume d'une grume de diamètre médian 0,8 m et de longueur 6 m.
- Pour le Douglas, 1 T de grume donne 1,6 m^3 de bois rond. On estime à 70 m^3 la coupe de Douglas. Un camion de 48 T est-il adapté ?
- Le sapin a un taux d'écorce de 11%. Déterminer le volume écorcé d'une coupe de sapin estimée à 80 m^3.
- …

- **Création d'un tarif de bois adapté par régression linéaire**

L'ajustement affine doit être abordé dans un premier temps de manière intuitive, « au jugé ».
C'est l'occasion de réinvestir, dans un contexte qui le justifie, les acquis sur les équations de droite en cohérence avec la pratique des automatismes. La subjectivité de ce type d'ajustement conduit à la nécessité d'établir un critère sur le choix d'un ajustement (points extrêmes, droite de Mayer...). Le principe de l'ajustement par la méthode des moindres carrés est justifié comme critère de minimisation des écarts entre les valeurs observées et prédites ; il doit être illustré à l'aide d'un outil numérique. Des situations issues de la vie économique, courante ou professionnelle sont exploitées pour des études d'ajustement. Le recours au changement de variable est indispensable au vu de la diversité des modèles existants. Les professionnels aident à choisir le bon modèle. Le recours aux essences locales d'arbre est attendu, à partir de relevés réalisés sur le terrain. Le fait de constater que la méthode se vérifie pour d'autres arbres justifie le fait de généraliser la démarche d'élaboration d'un tarif de cubage.

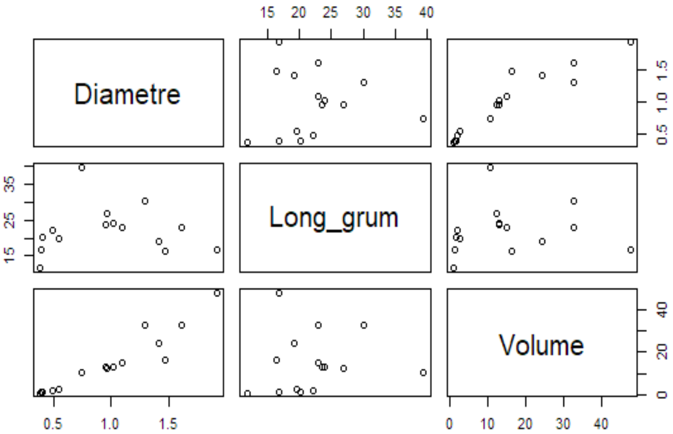
Exemple : Tarif de cubage de Entandrophragma cylindricum (Sapelli)
Source : https://revues.cirad.fr/index.php/BFT/article/view/20521/20280

Diametre	Long_grum	Volume
0,375	11,79	1,08
0,385	16,78	1,23
0,401	20,2	1,54
0,48	22,22	2,12
0,537	19,66	2,54
0,74	39,42	10,65
0,95	23,59	13,06
0,963	26,89	12,22
1,02	23,95	13,02
1,091	22,86	14,84
1,297	30,12	32,66
1,417	19,2	24,17
1,477	16,45	16,47
1,611	23,03	32,7
1,925	16,89	47,52

Un relevé de 15 mesures dendrométriques est donné par échantillonnage de Entandrophragma cylindricum (Sapelli)

- le diamètre de référence D, en m),
- la longueur de la grume (L, en m)
- le volume du fût (V, en m3).

La représentation de graphiques mettant en lien les grandeurs deux à deux justifie que la seule corrélation envisageable est celle liant diamètre et volume, ce qui est à la base des tarifs de cubage.



Le logiciel **R** permet de visualiser directement les corrélations en présentant les graphiques reliant les grandeurs deux à deux :

Pour cela, à partir des données recueillies sous format CSV ou XLSX (à mettre en colonne), on les transforme en fichier **R** exploitable :

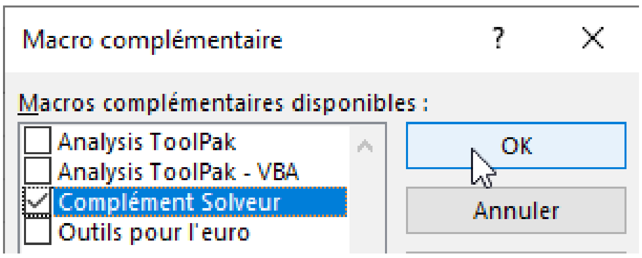
```
sapelli=read.csv2("C73sapelli.csv")
```
ou
```
sapelli=read.xlsx2("C73sapelli.csv",Sheetname="relevés")

plot(sapelli)
```

Dans un premier temps, les équations des droites « au jugé » proposées par les apprenants peuvent être comparées entre elles puis avec celles pour lesquelles on pose un critère.

Un logiciel de géométrie dynamique ou la fonction Solveur du tableur permet dans un deuxième temps de minimiser la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées et la valeurs prédites par un modèle linéaire.

Sur EXCEL (version 2010 et suivantes), il faut paramétrer le Solveur
Fichier – Options – Compléments – Atteindre et sélectionner **Complément Solveur**. Il apparaît alors disponible à droite dans l'onglet Données
Sur LibreOffice (version 5 et suivantes), il est disponible dans **Outils – Solveur**



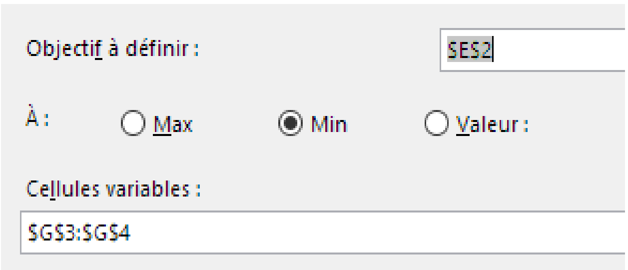
Attribuant des paramètres « au hasard » à **a** et **b** on calcule les y_i estimés, notés $\hat{v}_i$ avec ces paramètres dynamiques.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Diametre: d_i	Volume: v_i	Volume estimé: v_i^	Carré des ecarts: $(v_i - v_i\text{^})^2$	Somme carré des écarts		
2	0,375	1,08	1,375	0,087025	5078,08		
3	0,385	1,23	1,385	0,024025		a=	1
4	0,401	1,54	1,401	0,019321		b=	1
5	0,48	2,12	1,48	0,4096			
6	0,537	2,54	1,537	1,006009			
7	0,74	10,65	1,74	79,3881			
8	0,95	13,06	1,95	123,4321			
9	0,963	12,22	1,963	105,206049			
10	1,02	13,02	=$G$3*A10+$G$4				
11	1,091	14,84	2,091	162,537001			
12	1,297	32,66	2,297	921,911769			
13	1,417	24,17	2,417	473,193009			
14	1,477	16,47	2,477	195,804049			
15	1,611	32,7	2,611	905,347921			
16	1,925	47,52	2,925	1988,714025			

L'utilisation de l'outil Solveur fait apparaître la fenêtre ci-contre:
On sélectionne la cellule E2 qui est l'objet défini à minimiser, en tenant compte des cellules variables G3 et G4. La case

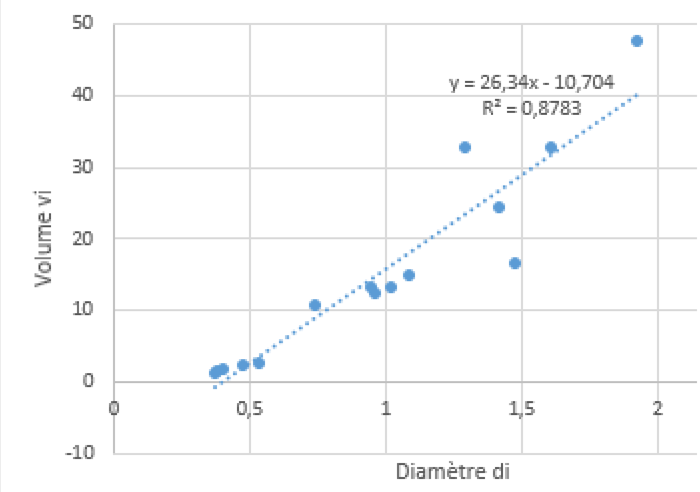
☐ Rendre les variables sans contrainte non négatives

doit être décochée.
Puis il suffit de cliquer sur **Résoudre** pour obtenir les valeurs **a** et **b** ainsi déterminées.
On retrouve alors les valeurs obtenues directement par régression linéaire.



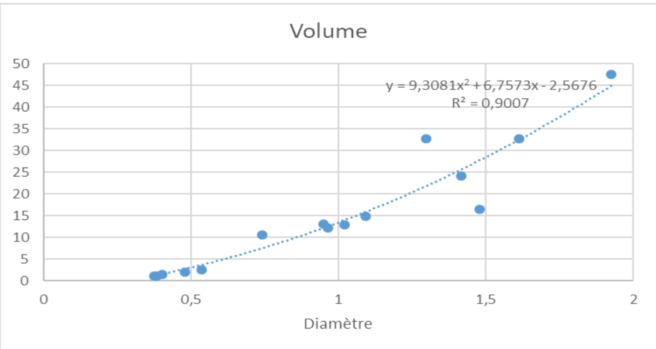
Le coefficient de détermination $R^2 = \dfrac{\sum (v_i - \bar{v})^2 - \sum (v_i - \hat{v}_i)^2}{\sum (v_i - \bar{v})^2} = 1 - \dfrac{\sum (v_i - \hat{v}_i)^2}{\sum (v_i - \bar{v})^2}$ peut être introduit comme quotient de la variance expliquée par le modèle par la variance totale. Il se détermine également à l'aide du tableur et on retrouve l'ensemble des paramètres donnés directement par la fonction **« courbe de tendance »**.

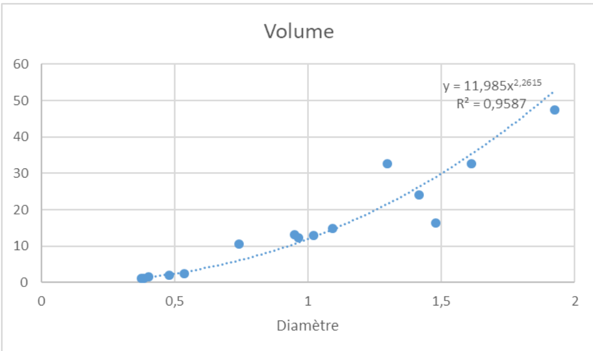
E	F	G	H	I	J	K
Somme carré des écarts			Moyenne v_i	$(v_i - moy(v_i))^2$	Somme $(v_i - moy(v_i))^2$	R^2
327,34947			15,05467	195,291308	2688,97837	=1-E2/J2
	a=	26,34		191,121408		
	b=	-10,7		182,646215		
				167,305602		
				156,616882		
				19,4010884		
				3,97869511		
				8,03533511		
				4,13986844		
				0,04608178		
				309,947762		
				83,0893018		
				2,00316844		
				311,357788		
				1053,99787		



Il y a alors concordance avec les valeurs indiquées par les paramètres du graphique.
Cette première approche permet de comprendre ce qu'est un ajustement. Mais les changements de variables sont nécessaires car ils décrivent mieux le lien entre les grandeurs. On peut se restreindre aux modèles polynôme du second degré et puissance qui sont les plus utilisés en gestion forestière.
La phase d'explication réalisée, les calculs en situation sont exclusivement effectués à l'aide d'un outil numérique (calculatrice, courbe de tendance du tableur ou logiciel statistique comme R).

Le modèle linéaire n'est pas, dans ce cas, le meilleur. Les deux modèles les plus utilisés pour le cubage sont le polynôme de degré 2 et puissance.





Le modèle dépend de l'échantillon. C'est une occasion pour évoquer l'intervalle de confiance des paramètres de l'ajustement.

Le modèle à une entrée permet de comprendre la construction de tarifs de cubage. Pour autant, dans la pratique, beaucoup d'expressions sont à deux entrées, c'est-à-dire utilisent deux mesures dendrométriques. L'élaboration de telles formules n'est pas un objectif du module, par contre l'utilisation d'abaques est une pratique à développer.

Exemple : Tarifs de cubage d'arbres pour l'aulne glutineux
Source : https://popups.uliege.be/1780-4507/index.php?id=17582&file=1&pid=15909

Évolution du volume bois fort tige (v, en m^3) estimé en fonction de la circonférence à 1,3 m (c, en cm) et de la hauteur totale (h, en m) : **$v = -0{,}034080 + 0{,}001152\,c + 0{,}000003215\,c^2 h$**

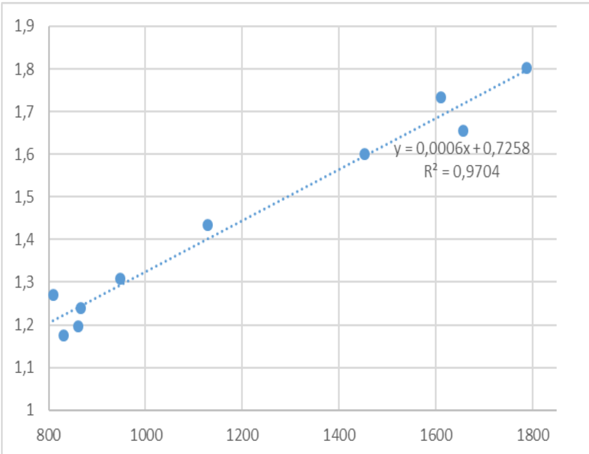
	h (en m)											
c (en cm)	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
25	0,011	0,015	0,019	0,023	0,027	0,031	0,035	0,039	0,043	0,047	0,051	0,055
35	0,038	0,046	0,054	0,061	0,069	0,077	0,085	0,093	0,101	0,109	0,117	0,124
45	0,07	0,083	0,096	0,109	0,122	0,135	0,148	0,161	0,174	0,187	0,2	0,213
55	0,107	0,127	0,156	0,165	0,185	0,204	0,224	0,243	0,263	0,282	0,302	0,321
65	0,149	0,177	0,204	0,231	0,258	0,285	0,312	0,34	0,367	0,394	0,421	0,448
75	0,197	0,233	0,269	0,306	0,342	0,378	0,414	0,45	0,486	0,523	0,559	0,595
85	0,25	0,296	0,343	0,389	0,435	0,482	0,528	0,575	0,621	0,668	0,714	0,761
95	0,307	0,366	0,424	0,482	0,54	0,598	0,656	0,714	0,772	0,83	0,888	0,946
105	0,37	0,441	0,512	0,583	0,654	0,725	0,796	0,867	0,938	1,008	1,079	1,15
115	0,439	0,524	0,609	0,694	0,779	0,864	0,949	1,034	1,119	1,204	1,289	1,374
125	0,512	0,612	0,713	0,813	0,914	1,014	1,115	1,215	1,316	1,416	1,516	1,617
135	0,59	0,707	0,825	0,942	1,059	1,176	1,293	1,41	1,528	1,645	1,762	1,879
145	0,674	0,809	0,944	1,079	1,214	1,35	1,485	1,62	1,755	1,89	2,026	2,161

- **Corrélation et causalité**

Au-delà de la mise en évidence d'une corrélation, le fait que, sur un relevé statistique, il puisse exister une relation entre deux grandeurs (corrélation), ne signifie pas pour autant qu'il existe entre elles un lien de causalité. Un travail avec l'enseignant de filière professionnelle est là essentiel.

Exemple :
Il a été relevé sur plusieurs années, aux USA, le nombre de nouveaux doctorats en informatique et les revenus générés par les jeux d'arcades.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Doctorats décernés en science informatique aux US	861	830	809	867	948	1129	1453	1656	1787	1611
Revenus générés par les jeux d'arcade	1,196	1,176	1,269	1,24	1,307	1,435	1,601	1,654	1,803	1,734



La corrélation est évidente, la causalité beaucoup moins !

Le site https://tylervigen.com/spurious-correlations en propose plusieurs autres, plus fantasques les unes que les autres !

- **Du côté des automatismes, exemples de « questions flash ».**

La pratique des automatismes vise à privilégier ici le sens des opérations, calculs algébriques, résolution d'équation et les manipulations de formules en fonction des contextes professionnels permettent d'automatiser de nombreux calculs.
Les exemples suivants ne sont là que pour illustrer l'importance de cette pratique et ne sauraient être en aucun cas exhaustifs :

- Estimer le volume de bois fort tige d'un aulne de 100 cm de circonférence c et de 10 m de hauteur h sachant que VBFT = -0,033 + 0,001 c + 0,0000034 c^2 h.
- Une estimation de la hauteur h d'un frêne en fonction de son âge a est donné par la relation h = 0,33a + 0,5. Estimer l'âge d'un frêne de hauteur 10,5 m….

Beaucoup de données en lien avec la forêt sont disponibles ici : https://www.fao.org/faostat/fr/#data/FO/visualize