Document d'accompagnement thématique

MINISTÈRE DE L'AGRICULTURE ET DE LA SOUVERAINETÉ ALIMENTAIRE
Liberté Égalité Fraternité

Inspection de l'Enseignement Agricole

Diplôme: BTSA Développement et Animation de projets TeRritoriaux (DATR)

Thème : Exemples d'utilisation des mathématiques dans des situations favorisant l'acquisition de capacités.

Commentaires, recommandations pédagogiques

L'enseignement des mathématiques doit contribuer, notamment en lien avec les disciplines professionnelles, à l'acquisition des capacités :

C42 – Traiter les données collectées.

C82 – Apporter un appui économique et juridique à un porteur de projet

L'enseignant veille à s'appuyer sur les acquis des élèves pour développer de nouveaux outils mathématiques principalement dans le but de répondre à des problématiques professionnelles. La mobilisation de ces outils dans le cadre de la résolution de problèmes concourt à l'obtention des capacités professionnelles susvisées. Cela donne du sens, puis montre l'importance de mobiliser de nouveaux outils mathématiques au service de l'acquisition des capacités professionnelles.

L'enseignement des mathématiques est intégratif et l'association avec ce qui est fait dans les disciplines professionnelles est un appui qui permet d'ancrer durablement les apprentissages. Les contextes doivent varier en fonction des situations techniques et provenir de documents issus de sources multiples : Insee, Agreste, la statistique agricole (agriculture.gouv.fr), data.gouv.fr, documentations, résultats issus de projets, structures d'accueil en stage ou en apprentissage, …

Les progressions construites par l'enseignant de mathématiques en collaboration avec les enseignants de disciplines professionnelles doivent être en cohérence avec les attentes didactiques et pédagogiques de chaque discipline.

La résolution de problèmes demande de mobiliser des techniques calculatoires. Les calculs, pour une grande partie, peuvent être délégués à un outil de calcul numérique (calculatrice, tableur, logiciel de calcul, …). Il ne s'agit pas ici de développer une virtuosité technique mais plutôt de se positionner comme observateur et de se questionner sur les processus mis en œuvre dans le domaine professionnel. La recherche de réponses amènera naturellement à élaborer des démarches, mener des calculs à l'aide d'un outil adapté, s'assurer de la cohérence de résultats et prendre des décisions.

L'institutionnalisation des notions, phase indispensable dans le processus d'apprentissage, a pour but d'expliciter les savoirs et les savoir-faire qui ont été mobilisés pendant la séance ou séquence, de donner des repères simples aux apprenants. Ce temps doit être court et synthétique. Les développements théoriques sont réduits à l'essentiel et toujours présentés dans un cadre simple.

Les situations développées dans ce document ne couvrent pas la totalité du référentiel mais illustrent l'esprit dans lequel l'enseignement des mathématiques doit être mis en œuvre.

Des mathématiques transversales à tous les blocs de compétences.

L'acquisition des capacités professionnelles demande d'aborder de nouvelles notions qui s'appuient de façon implicite sur des connaissances mathématiques vues dans les classes antérieures du collège et du lycée. Certaines difficultés d'apprentissage de ces nouveaux concepts proviennent d'un manque de maîtrise de ces prérequis. Il est indispensable d'y consacrer régulièrement du temps afin de réactiver et consolider ces savoirs sans entrer dans un schéma de révision. Le choix de réinvestir les notions transversales suivantes est décidé en fonction de la progression choisie et définie en cohérence avec les disciplines professionnelles:

- Proportion, pourcentage et proportionnalité.
- Sens des opérations, application de formules, représentation graphique de fonctions et exploitation graphique.
- Représentations de diagrammes statistiques pertinents, interprétation et utilisation d'indicateurs statistiques.
- Probabilités élémentaires, lien entre fréquences et probabilités, arbres de probabilités.

Afin que les apprenants soient aguerris aux pratiques calculatoires élémentaires favorisant l'acquisition des capacités, des automatismes mathématiques doivent être développés par un travail régulier, afin d'obtenir une aisance suffisante. La pratique de l'ensemble de ces items doit être très régulière, principalement sur des situations en lien avec les disciplines professionnelles.

Au-delà d'une pratique dans toutes les activités de la classe, il est aussi important d'entretenir ces automatismes par des rituels de début de séance, très régulièrement sur l'ensemble des deux années, sous forme de « questions flash » privilégiant l'activité mentale avec un recours à des connaissances, des procédures, des méthodes et des stratégies fondamentales dans la pratique professionnelle. Cela ne doit pas faire l'objet d'un chapitre d'enseignement spécifique car les notions qui les sous-tendent ont été travaillées dans les classes antérieures. Cette pratique, propre à chaque enseignant, doit s'adapter aux besoins propres aux métiers visés.

Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs mais donnent une orientation de ce qui peut être fait.

Parmi eux, certains doivent être propices au calcul mental.

- Sens des opérations qui permet d'effectuer des calculs courants.
- Calcul d'une moyenne, une moyenne pondérée.
- Passage d'une proportion (1/2, 3/4, 1/5, …) à un pourcentage (50%, 75%, 20%, …) et inversement.
- Calcul de pourcentages, calcul de prix TTC à partir d'un prix HT et inversement, avec des taux de TVA différents.
- Lien entre augmentation et diminution en pourcentage avec coefficient multiplicateur et les utiliser en situation.
- Comparaison en situation des proportions et des pourcentages.
- Application de formules et détermination de la valeur numérique d'une grandeur connaissant les autres.
- Calculs géométriques élémentaires s'appuyant sur les objets géométriques élémentaires : rectangle, carré, triangle, cube, pavé, cylindre.
- Conversions de mesures et capacités usuelles (cm^3 en L, ha en km^2, …)
- Reconnaissance graphique des fonctions de référence, en décrire les variations et les extremums.
- Choix d'une représentation graphique adaptée pour représenter des données, des proportions ou des pourcentages (graphique, diagramme circulaire, semi-circulaire, diagramme en bâton ou en barres, barres empilées, …).
- Inversement, interprétation des diagrammes et retrouver des données statistiques à partir de représentations.

Les outils numériques doivent être intégrés à l'enseignement des mathématiques. Ils apportent une plus-value permettant d'aborder de véritables problèmes issus des disciplines professionnelles. L'usage des outils numériques tels que le tableur, les logiciels de traitement de données statistiques, de sondage, de cartographie, … doit être pensé dans l'optique de résoudre des problèmes qui n'auraient pas été accessibles sans. La maîtrise de ces outils numériques n'est pas un but en soi de l'enseignement des mathématiques. La calculatrice reste aussi un outil facilement mobilisable en classe. Cela n'est pas contradictoire avec une pratique du calcul mental régulière mais raisonnée, tant par la difficulté des questions posées que le contexte de sa pratique.

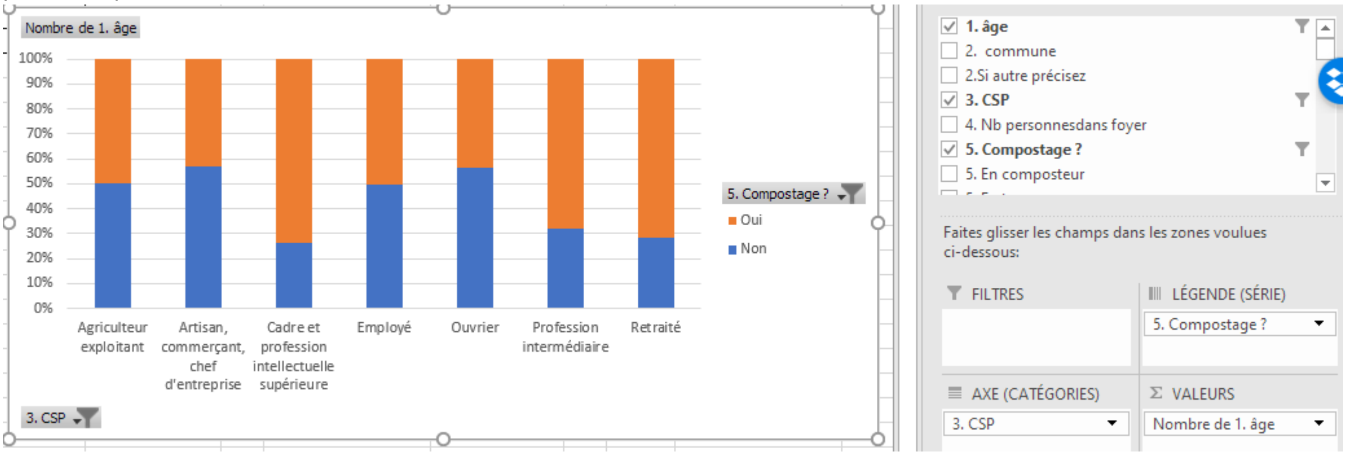
- **Méthodes d'enquêtes de terrain**

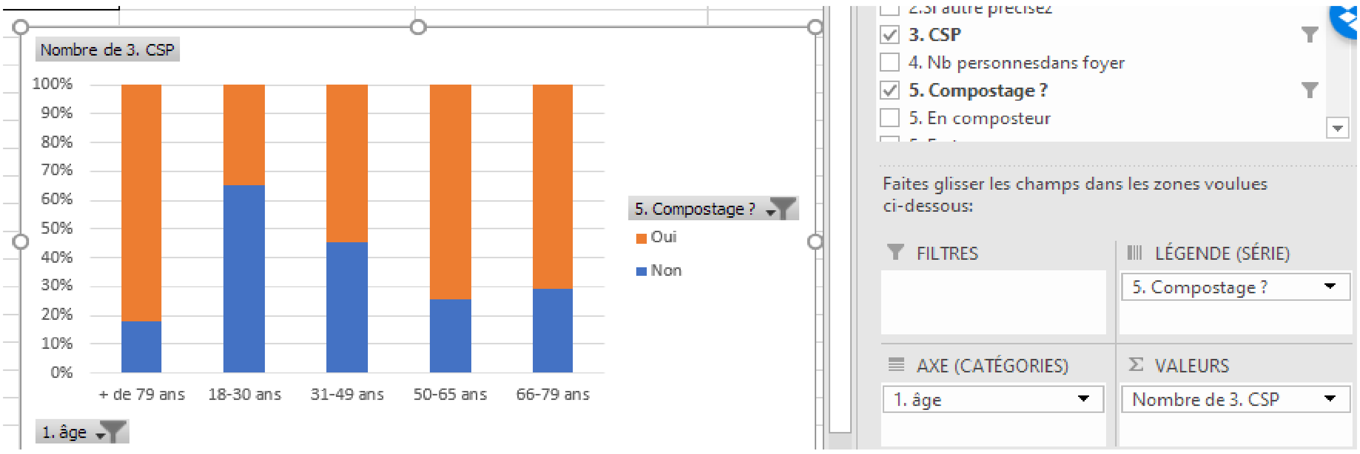
La mobilisation d'outils numériques (Sphinx, Google Forms, Lime Survey, …) suite à l'élaboration de questionnaires et grilles d'entretiens permet de collecter les données sous la forme d'un fichier tableur. Son exploitation permet d'effectuer des tris à plat ou croisés pour permettre une analyse de ces données. En outre, la saisie de formules duplicables pour des calculs d'indicateurs statistique favorise le travail des automatismes afférents.

Exemple : Un questionnaire à destination de plus de 600 personnes vise à connaitre les habitudes en terme de compostage. Le recueil des données se fait via le fichier tableur suivant (CSP : Classe Socio-Professionnelle) :

	A	B	C	D
1				
3	1. âge	3. CSP	4. Nb personnesdans foy	5. Compostage
4	31-49 ans	Employé	1	Oui
5	66-79 ans	Retraité	2	Oui
6	66-79 ans	Retraité	2	Oui
7	31-49 ans	Autre	5 ou +	Oui
8	31-49 ans	Cadre et profe	4	Non
9	31-49 ans	Cadre et profe	4	Non
10	50-65 ans	Cadre et profe	4	Oui
11	31-49 ans	Employé	4	Non
12	31-49 ans	Cadre et profe	3	Oui
13	31-49 ans	Artisan, comm	4	Oui
14	31-49 ans	Employé	4	Oui

La fonctionnalité de tableau croisé dynamique permet de construire un tableau à double entrée, dont les résultats peuvent ensuite être représentés notamment par des diagrammes empilés de fréquence en fonction des grandeurs que l'on veut mettre en relation. Cela donne des éléments d'analyse sans pour autant faire appel à des outils mathématiques élaborés. Il est aisé de changer les variables observées (la grandeur en haut à gauche du graphique permet de comptabiliser le nombre de personnes) :





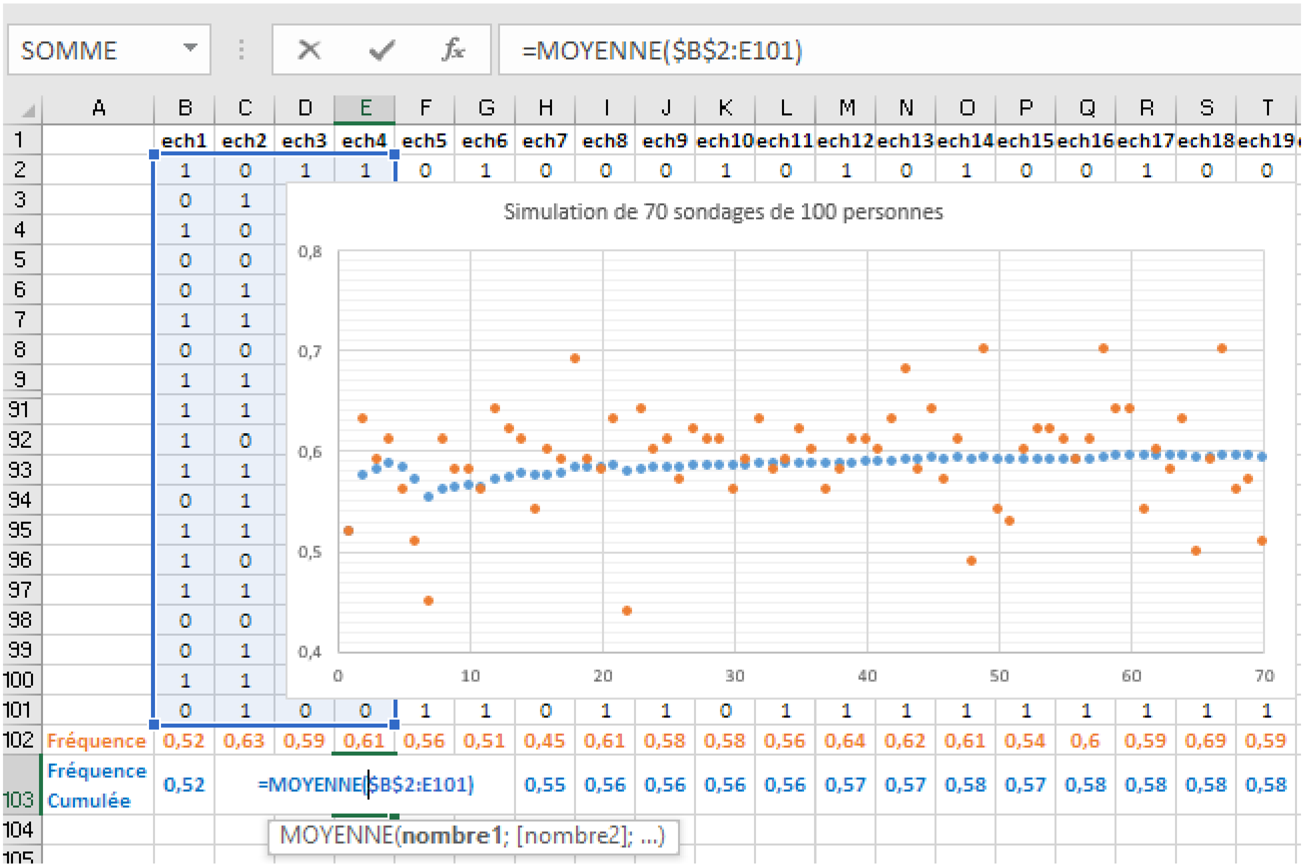
Dans chaque cas, il se distingue deux groupes qui n'ont pas la même propension à composter, ce qui suggère un lien de dépendance entre la CSP (ou la classe d'âge même si c'est moins évident dans le cadre des classes d'âge) et le fait de composter. Cela peut également donner des éléments sur la qualité du choix de l'amplitude de la classe d'âge 31-49 ans qui mériterait peut-être d'être divisée. **Le test statistique du Khi-deux** n'est pas attendu, c'est une approche graphique explicite qui doit être un moyen de convaincre.

- **Traitement des données**

Loi binomiale

Exemple : En 2019, 60% des riverains étaient favorables à la construction d'une piste cyclable. A l'occasion d'un changement d'équipe municipale après les élections, le maire veut relancer le projet et se demande si la proportion de personnes favorables au projet a évolué.

Dans un premier temps, on se place dans le cas où la proportion reste de 60% pour appréhender les éventuelles fluctuations liées à la variabilité d'un échantillon. La simulation d'un tel sondage est effectuée en réalisant la somme de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de paramètre 0,6.
Ce peut être fait par le tableur en simulant de façon aléatoire le succès d'une épreuve avec une probabilité de 0,6 grâce à la fonction ALEA, par exemple **=SI(ALEA()<0,6 ;1 ;0)**. On réalise des échantillons de même taille pour lesquels on détermine la proportion de 1. Ceci peut être l'occasion de faire un travail de groupe, chaque groupe choisissant la taille de ces échantillons. L'objectif est de faire constater d'une part la fluctuation d'échantillonnage et d'autre part une plus grande fiabilité de l'estimation de la proportion lorsque la taille de l'échantillon augmente. Il est indispensable dans le cadre d'enquête de prendre des échantillons suffisamment grands. C'est l'occasion de repréciser la différence entre fréquence et probabilité.
Dans le cas où sont répétées les simulations de sondages sur 100 personnes, le fait de tracer sur le même graphique les fréquences cumulées permet de visualiser et comprendre la stabilisation des fréquences après un « très grand nombre » de répétitions. Dans chaque cas, il n'est pas forcément attendu que l'apprenant sache construire l'outil, mais qu'il comprenne son fonctionnement et la nécessité de choisir des échantillons « suffisamment grands ».



L'utilisation d'un script Python permet de mettre en évidence l'importance dans le choix de la taille de l'échantillon pour estimer la proportion.

```
from random import*
from numpy import mean

def bernoulli(p): #simulation loi de Bernoulli B(p)
    if random()<p:
        return 1
    else:
        return 0

def moyenne_bernoulli(n,p): # répétition de n simulations de B(p)
    liste_bernoulli=[]      # liste de chaque simulation
    for i in range(n):
        liste_bernoulli.append(bernoulli(p))
    return mean(liste_bernoulli)  # calcul de la moyenne pour voir convergence
```

Plusieurs essais illustrent une estimation de plus en plus précise à mesure que la taille de l'échantillon augmente, bien que la précision obtenue ne soit pas proportionnelle à la taille de l'échantillon :

>>> moyenne_bernoulli(10,0.6) 0.5 >>> moyenne_bernoulli(10,0.6) 0.6 >>> moyenne_bernoulli(10,0.6) 0.2	>>> moyenne_bernoulli(30,0.6) 0.6333333333333333 >>> moyenne_bernoulli(30,0.6) 0.4666666666666667 >>> moyenne_bernoulli(30,0.6) 0.5333333333333333
>>> moyenne_bernoulli(100,0.6) 0.57 >>> moyenne_bernoulli(100,0.6) 0.67 >>> moyenne_bernoulli(100,0.6) 0.67	>>> moyenne_bernoulli(500,0.6) 0.582 >>> moyenne_bernoulli(500,0.6) 0.576 >>> moyenne_bernoulli(500,0.6) 0.65

Sur une version plus récente de Python (à partir de 3.6 et Edupython 3.1), le code suivant permet d'utiliser les fonctionnalités de ce langage pour effectuer et faire apparaitre les résultats de simulations grâce aux commandes **choices** et f-string notée **f'** :

```
from random import*
from numpy import mean

for i in range(50,2000,50):
    resultat=mean(choices(population=[0,1],weights=(0.4,0.6),k=i))
    print(f'Pour {i} lancers, moyenne={resultat}')
```

Intervalles de confiance d'une fréquence

La somme de n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, d'espérance p et de variance $p(1-p)$ est une variable aléatoire suivant une loi binomiale d'espérance np et de variance $np(1-p)$.

Les propriétés de l'espérance et de l'écart type permettent de conclure que la variable aléatoire fréquence

$\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ a pour espérance p et écart type $\sigma = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$.

On cherche alors à déterminer ce que l'on appelle **l'intervalle de fluctuation** de la fréquence pour un certain niveau de confiance $1-\alpha$ (α étant appelé seuil de risque) : si la proportion d'une population remplissant un certain critère est p, la probabilité qu'un échantillon donne une fréquence d'apparition de ce critère appartenant à cet **intervalle de fluctuation** est $1-\alpha$.

A partir du même exemple,
toujours en considérant la proportion de 60% inchangée, la simulation avec le langage Python permet d'estimer la probabilité avec laquelle une fréquence appartient à un intervalle donné.

```python
def fluctuation(ecart,n,p):   # on regarde pour n simulations d'une loi B(p)
    liste_succes=[]             # la proportion (pour 10000 échantillons) de
    for i in range(10000):      # celles qui s'écartent de p de moins de "ecart"
        if abs(moyenne_bernoulli(n,p)-p)<=ecart:
            liste_succes.append(1)
        else:
            liste_succes.append(0)
    return mean(liste_succes)

print(fluctuation(0.01549,1000,0.6)) # sigma v.a. fréquence = 0,01549..
print(fluctuation(0.03098,1000,0.6)) # 2*sigma v.a. fréquence = 0,03098..
print(fluctuation(0.04648,1000,0.6)) # 3*sigma v.a. fréquence = 0,04648..
```

```
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
0.6866
0.95
0.9974
```

Les résultats de la console signifient que dans le cas où 60% des riverains sont favorables au projet, la probabilité, lors d'un sondage de 1000 personnes, que l'intervalle [0,6 – 0,01549 ; 0,6 + 0,01549] = [0,58451 ; 0,61549] contienne la fréquence de personnes favorables est d'environ 0,68, appelé niveau de confiance. Cet intervalle est alors appelé **intervalle de fluctuation** de la fréquence. Certes, c'est une fréquence obtenue par simulation, mais le grand nombre de répétitions (10 000) nous permet d'estimer de façon très fiable la probabilité.
De même, la probabilité, lors d'un sondage de 1000 personnes, que l'intervalle[0,6 – 0,03098 ; 0,6 + 0,03098] = [0,56902 ; 0,63098] contienne la fréquence de personnes favorables est d'environ 0,95, autre niveau de confiance.
A partir de divers autres exemples, on illustre le résultat suivant qui sera admis :
La fréquence, pour un échantillon de taille n qu'un critère ayant la probabilité p d'apparaitre ($n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$), appartient à l'intervalle :

- $[p-\sigma; p+\sigma] = \left[p - \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$ avec une probabilité d'environ 0,68, appelé niveau de confiance.
- $[p-2\sigma; p+2\sigma] = \left[p - 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$ avec une probabilité d'environ 0,95, appelé niveau de confiance.
- $[p-3\sigma; p+3\sigma] = \left[p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$ avec une probabilité d'environ 0,997, appelé niveau de confiance.

Pour information, et ce n'est pas un attendu, ces intervalles de fluctuation sont théoriquement ceux d'une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance p et d'écart type σ et que les théorèmes d'approximation (Moivre/central limite) permettent de s'y rapporter pour la variable aléatoire fréquence définie plus haut, dans le cadre de grands échantillons

L'intervalle de fluctuation d'une fréquence permet de comprendre que si l'on suppose connue une proportion théorique d'apparition d'un phénomène, les issues relevées lors d'un échantillon apparaissent avec une fréquence dans un tel intervalle, dans un certain pourcentage des cas. Mais dans la réalité cette probabilité n'est pas connue puisque c'est elle que l'on cherche à estimer. Le questionnement est de déterminer, à partir d'échantillons, une estimation de la probabilité d'apparition d'un phénomène.

Sur un exemple, on peut comprendre que les rôles de f et p peuvent être symétriques :

Exemple : **En 2019, 60% des riverains étaient favorables à la construction d'une piste cyclable. A l'occasion d'un changement d'équipe municipale après les élections, le maire veut relancer le projet et se demande si la proportion de personnes favorables au projet a évolué. Un nouveau sondage en 2023 est effectué sur 400 personnes et 263 se disent favorables au projet. Entre quelles limites peut-on situer la proportion des personnes favorables au projet ?**

Si p est la proportion inconnue des personnes favorables au projet, lorsqu'on choisit une personne, la probabilité pour qu'elle soit favorable au projet est p. Le nombre d'habitants étant important, choisir 400 personnes revient à réaliser, de façon identique et indépendante, 400 fois la même expérience.

On a observé la valeur f = 263/400 = 0,6575. Pour un niveau de confiance de 95%, on peut considérer que :

$p-2\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{400}} \le 0,6575 \le p+2\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{400}}$, soit $0,6575-2\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{400}} \le p \le 0,6575+2\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{400}}$

Si l'on cherche à résoudre de façon exacte l'inéquation précédente,

$$0,6575-2\sqrt{\frac{p(1-p)}{400}} \le p \le 0,6575+2\sqrt{\frac{p(1-p)}{400}} \Leftrightarrow -2\sqrt{\frac{p(1-p)}{400}} \le p-0,6575 \le 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{400}}$$

$$\left(p-0,6575\right)^2 \le 4\frac{p(1-p)}{400} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 0,6087 \le p \le 0,7032$$

Par ailleurs, p étant assez proche de f, on déduit de $\underbrace{0,6575}_{=f}-2\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{400}} \le p \le \underbrace{0,6575}_{=f}+2\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{400}}$, en assimilant p à f, que

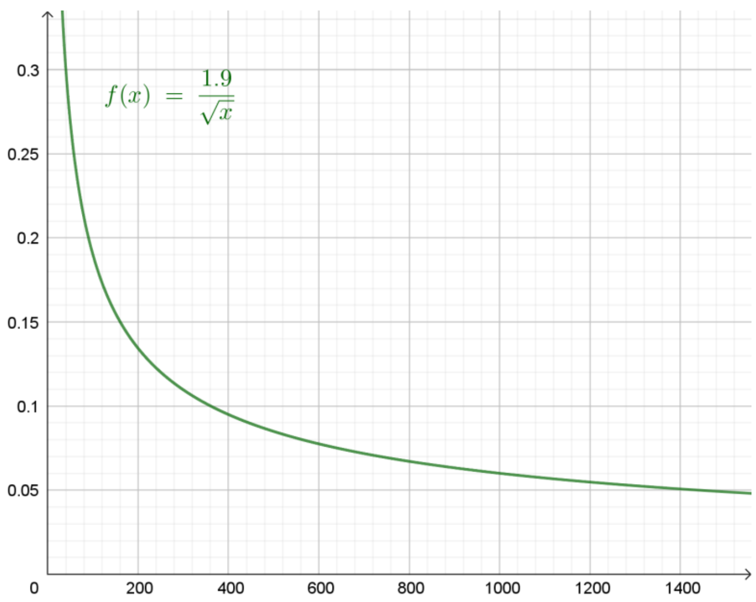
$f-2\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{400}} \le p \le f+2\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{400}}$, ce qui donne en application numérique supposant $0,610 \le p \le 0,705$, résultat très proche de l'encadrement issu de la résolution exacte.

<u>Enquêtes et intervalles de confiance.</u>

Lors du nouveau sondage auprès de 400 personnes, 263 se disent favorables au projet.

Pour ce sondage, la fréquence $f=\dfrac{263}{400}=0,6575$ est une estimation ponctuelle de la proportion de personnes favorables au projet sur la commune. L'intervalle de confiance est :

$\left[0,6575-2\times\sqrt{\dfrac{0,6575(1-06575)}{400}}\ ;\ 0,6575-2\times\sqrt{\dfrac{0,6575(1-06575)}{400}}\right] \approx [0,610;0,705]$. Le fait que 0,6 n'appartienne pas à cet intervalle signifie, avec un niveau de confiance de 95%, que la proportion a changé.



La sensibilisation à la taille de l'échantillon pour faire diminuer l'amplitude de l'intervalle peut être illustrée graphiquement en représentant, dans ce cas, la fonction qui donne l'amplitude de l'intervalle en fonction de la taille de l'échantillon :

$$n \mapsto 2\times\frac{2\sqrt{0,6575(1-0,6575)}}{\sqrt{n}} \approx \frac{1,9}{\sqrt{n}}.$$

Il apparait qu'il faut au moins 360 personnes interrogées pour avoir une amplitude de l'intervalle inférieure à 0,1, au moins 1450 personnes pour avoir une amplitude de l'intervalle inférieure à 0,05, et ainsi de suite. Pour diminuer de moitié cette amplitude, il faut multiplier par environ 4 le nombre de personnes interrogées. S'il n'y a pas de limite théorique, il existe une limite pratique.

D'où l'importance d'outils de sondage en ligne pour augmenter le nombre de réponses et préciser l'indicateur cherché.

<u>Réalisation d'une modélisation simple en construisant un ajustement affine</u>

L'ajustement affine doit être abordé dans un premier temps de manière intuitive, « au jugé ».
C'est l'occasion de réinvestir, dans un contexte qui le justifie, les acquis sur les équations de droite en cohérence avec la pratique des automatismes. La subjectivité de ce type d'ajustement conduit à la nécessité d'établir un critère sur le choix d'un ajustement (points extrêmes, droite de Mayer...). Le principe de l'ajustement par la méthode des moindres carrés est justifié comme critère de minimisation des écarts entre les valeurs observées et prédites ; il doit être illustré à l'aide d'un outil numérique. Des situations issues de la vie économique, courante ou de la spécialité du diplôme sont exploitées pour des études d'ajustement.

<u>Exemple</u> :
Le tableau ci-dessous donne l'évolution du chiffre d'affaires, noté CA, du marché du tourisme en ligne de 2006 à 2013 en France.

Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
CA en milliards d'euros : y_i	4,2	5,3	7	8	9,6	10,9	11,7	12,4

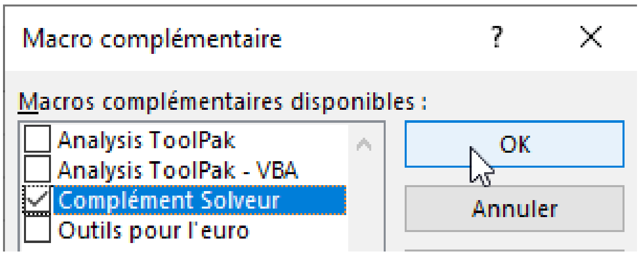
Étude XERFI, FEVAD

(Données issues du sujet bac STMG juin 2015, Antilles Guyane)

Dans un premier temps, les équations des droites « au jugé » peuvent être comparées entre elles puis avec celles pour lesquelles on pose un critère.

Un logiciel de géométrie dynamique ou la fonction Solveur du tableur permet dans un deuxième temps de minimiser la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées et la valeurs prédites par un modèle linéaire.

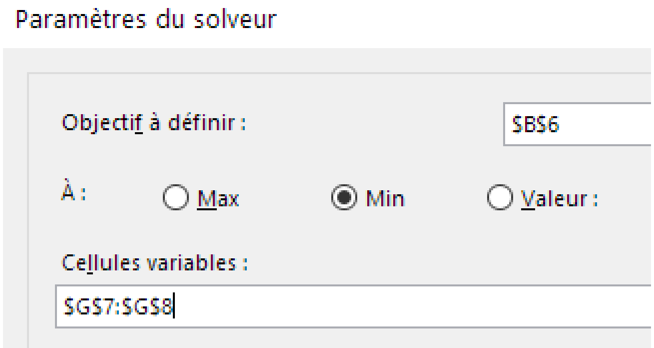
Sur EXCEL (version 2010 et suivantes), il faut paramétrer le Solveur
Fichier – Options – Compléments – Atteindre et sélectionner **Complément Solveur**. Il apparaît alors disponible à droite dans l'onglet Données
Sur LibreOffice (version 5 et suivantes), il est disponible dans **Outils – Solveur**



Attribuant des paramètres « au hasard » à **a** et **b** on calcule les y_i estimés, notés $\hat{y}_i$ avec ces paramètres dynamiques.

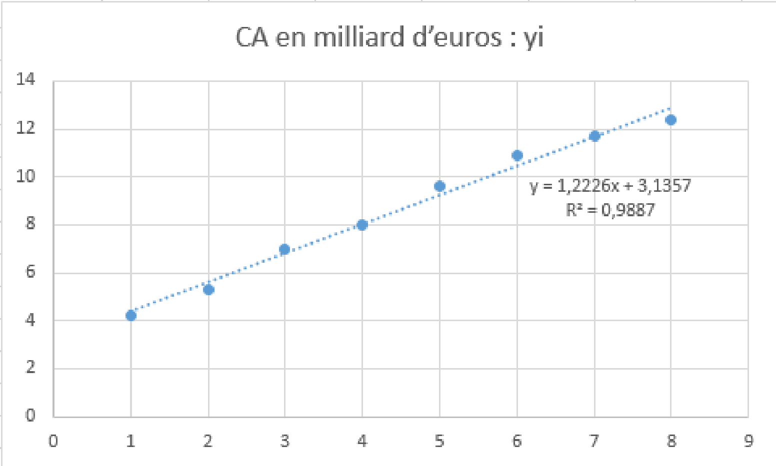
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
2	Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
3	CA en milliard d'euros : y_i	4,2	5,3	7	8	9,6	10,9	11,7	12,4
4	CA en milliard d'euros estimés : y^i	2		=$G$7*D2+$G$8		6	7	8	9
5	carrés des écarts: (yi-y^i)²	4,84	5,29	9	9	12,96	15,21	13,69	11,56
6	Somme carrés écarts	81,55							
7						a=	1		
8						b=	1		

L'utilisation de l'outil Solveur fait apparaître la fenêtre ci-contre:
On sélectionne la cellule B6 qui est l'objet défini à minimiser, en tenant compte des cellules variables G7 et G8. Il suffit de cliquer sur **Résoudre** pour obtenir les valeurs **a** et **b** ainsi déterminées.



Le coefficient de détermination $R^2 = \dfrac{\sum(y_i-\bar{y})^2 - \sum(y_i-y_i)^2}{\sum(y_i-\bar{y})^2} = 1 - \dfrac{\sum(y_i-y_i)^2}{\sum(y_i-\bar{y})^2}$ peut être introduit comme quotient de la variance expliquée par le modèle par la variance totale. Il se détermine également à l'aide du tableur et on retrouve l'ensemble des paramètres donnés directement par la fonction **« courbe de tendance »**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
5	carrés des écarts: (yi-y^i)²	0,025069	0,078934	0,038584	0,000686	0,123335	0,183673	3,54E-05	0,266944
6	Somme	0,717262							
7						a=	1,222619		
8						b=	3,135714		
9	Moyenne yi	8,6375							
10	[(yi-moy(y))²]	19,69141	11,13891	2,681406	0,406406	0,926406	5,118906	9,378906	14,15641
11	somme [(yi-moy(y))²]	63,49875							
12	R²	0,988704							



La pertinence du modèle se fait au regard de la réalité des valeurs prédites et des conditions du contexte qui sont restés inchangées sur la période
« *46%, c'est la part de marché que représente l'e-tourisme en France en 2019, selon les estimations de Phocuswright. Soit un volume d'affaires de 21 milliards d'euros*. »
https://www.lechotouristique.com/article/e-tourisme-les-chiffres-cles-2019-de-le-tourisme

2019 correspond à l'année de rang 14, soit une estimation de 1,2226×14 + 3,1357 = 20,25 milliards d'euros. Naturellement la crise sanitaire impactant le tourisme, le modèle ne semble plus valide à partir de 2020. C'est l'occasion de parler des limites de la modélisation.

On prendra également, **si cela se justifie**, quelques cas nécessitant un changement de variable qui permettent de mettre en évidence une relation de linéarité entre ces nouvelles variables.
La phase d'explication réalisée, les calculs en situation sont exclusivement effectués à l'aide d'un outil numérique (calculatrice ou courbe de tendance du tableur).

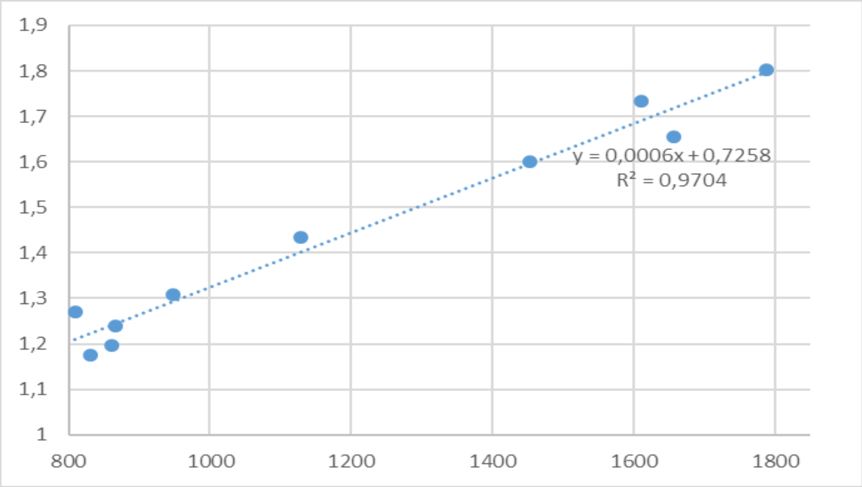
Corrélation et causalité

Au-delà de la mise en évidence d'une **corrélation**, le fait que, sur un relevé statistique, il puisse exister une relation entre deux grandeurs (corrélation), ne signifie pas pour autant qu'il existe entre elles un lien de **causalité**.

Exemple :
Il a été relevé sur plusieurs années, aux USA, le nombre de nouveaux doctorats en informatique et les revenus générés par les jeux d'arcades.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Doctorats décernés en science informatique aux US	861	830	809	867	948	1129	1453	1656	1787	1611
Revenus générés par les jeux d'arcade	1,196	1,176	1,269	1,24	1,307	1,435	1,601	1,654	1,803	1,734

La corrélation est évidente, la causalité beaucoup moins !



Le site https://tylervigen.com/spurious-correlations en propose plusieurs autres, plus fantasques les unes que les autres !
Le site du Monde donne aussi des exemples de corrélations non causales :
[Corrélation ou causalité ? Brillez en société avec notre générateur aléatoire de comparaisons absurdes (lemonde.fr)]()

- **Du côté des automatismes, exemples de « questions flash ».**

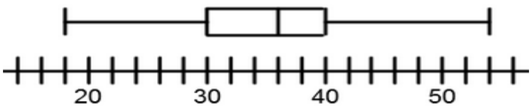
Pour l'enseignement de cette capacité, il paraît utile de privilégier les automatismes relatifs aux sens des opérations, calculs de proportions et pourcentages, équations de droites, représentations graphiques, calculs statistiques.

Exemples :

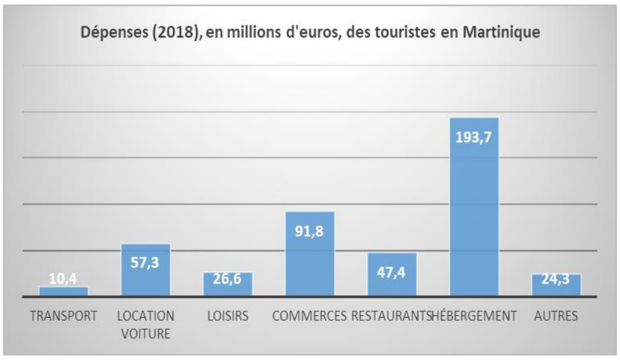
- La population mondiale est passée de 6,1 milliards d'individus en 2000 à 7,8 milliards en 2020.
  - Déterminer le taux annuel moyen d'augmentation.
  - En supposant le modèle linéaire, déterminer une relation affine entre l'année et le nombre d'individus constituant la population mondiale.
- Le nombre de livre vendus chaque année en millions d'unité est donné par le tableau suivant :

2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
451,9	450,6	440,9	426,8	421,8	436,7	434,5	430

  Déterminer la moyenne de livres vendus sur cette période.
- Un prix, après avoir subi une baisse de 10% est de 108€, quel était le prix initial ?
- On donne le diagramme en boite suivant, résultat d'un sondage sur un échantillon de 1000 personnes auxquelles on a demandé leur âge.
  - Donner l'étendue de cet échantillon
  - Donner la médiane de cet échantillon.
  - Donner le pourcentage de personnes de cet échantillon dont l'âge est inférieur à 40 ans.



- Sur un site de litières pour chevaux, il est écrit : « Une livraison de sacs chargés individuellement (appelée « charge au sol ») peut nécessiter deux heures de déchargement pour une équipe de cinq personnes. ». Donner le temps nécessaire à une équipe de 4 personnes pour décharger deux livraisons.
- Dans un local de stockage, le linéaire total d'un rayon contenant des palettes de tailles identiques est de 25 mètres, Les palettes contenant le terreau s'étalent sur 3m. A quel pourcentage du linéaire total correspond le linéaire de terreau ?
- Le montant de la location d'un local commercial a augmenté de 4% en entre 2017 et 2018 puis de 7% entre 2018 et 2019. Déterminer une valeur approchée du taux annuel moyen sur la période 2017 – 2019.
- Il y a eu, en 2018, 1 046 735 touristes en Martinique. Les dépenses sont résumées par ce graphique
  - Déterminer le pourcentage que représente l'hébergement dans ces dépenses.
  - Calculer le montant moyen dépensé par chaque touriste.
- …



C82 – Apporter un appui économique et juridique à un porteur de projet

- ***Éléments d'analyse économique de la rentabilité d'une structure ou d'un projet***

Il est ici question de l'utilisation d'outils de gestion comptable, financière et budgétaire. Si leur enseignement relève avant tout des SESG, la mobilisation d'outils mathématiques élémentaires est indispensable à l'acquisition de capacités nécessitant de mobiliser des ressources variées, adaptées au contexte proposé.

Exemple :
Une association a pour objectif la sensibilisation au patrimoine naturel, culturel et historique en valorisant son territoire. Nous disposons des comptes de 2021, en particulier un extrait sur certains pôles :

Extrait du Compte de résultat détaillé (Produits d'exploitation)		Exercice N 31/12/2021	Exercice N-1 31/12/2020
COTISATIONS		1 124	667
75610000	COTISATIONS SANS CONTREPARTIE	1 124	667
VENTES DE BIENS		1 968	2 105
70710000	VENTES BOUTIQUES		14
70711000	VENTES SENTIERS D'OZEGAN		375
70714000	SENTIERS SUR LE BOUT DE LA LAN	4	
70715000	VENTES ET VISITES PRIEURE	1965	1716
VENTES DE DONS EN NATURE		176	
70730000	VENTES DIVERSES Les activités	176	
VENTES DE PRESTATIONS DE SERVICE		241 099	107 175
70601000	ACCUEIL CLASSES DECOUVERTE = Centre d'hébergement	41 218	56 789
70602000	ACCUEIL FORMATIONS = Centre d'hébergement	52 889	2 904
70603000	ACCUEIL FAMILLES = Centre d'hébergement	3 890	
70604000	ACCUEIL ASSOCIATIONS = Centre d'hébergement	9 957	7 527
70604100	ACCUEIL PUBLIC T.ADAPTE = Centre d'hébergement	68 796	
70605000	ANIMATIONS JOURNEE NATURE	12 054	1 175
70605100	ANIMATIONS ESTIVALES	12 369	10 937
70605200	ANIMATIONS JOURNEES PREHISTOIR	8 275	3 665
70605300	ANIMATIONS ESTIVALES NATURE	320	23
70605400	ANIMATIONS FORMATIONS RNR	520	63
70605500	PRESTATIONS FORMATION = Centre d'hébergement	2 190	2 070
70607000	PRESTATIONS PEL = Centre d'hébergement	10 370	5 118
70608000	PRESTATIONS DIVERSES = Centre d'hébergement	9 689	8 073
70609000	PRESTATIONS CG 56 = Centre d'hébergement	6 700	8 664
70821000	TAXE DE SEJOUR = Centre d'hébergement	1 861	167

Si l'on s'intéresse, par exemple, au chiffre d'affaires des pôles « centre d'hébergement », « animations » et « vente et visites Prieuré », cela se résume dans le tableau suivant, qui peut d'ailleurs être automatisé avec le tableur :

Activité / Chiffre d'affaires		Centre d'hébergement	Activités d'animation	Ventes et Visites Prieuré	Total
CA n	Valeur	207 560 €	33 538 €	1 965 €	243 063 €
	Part du CA total	85.39%	13.80 %	0.81 %	
CA n-1	Valeur	91 312 €	15 863 €	1 716 €	108 891 €
	Part du CA total	83.39 %	14.57 %	1.57 %	
Taux d'évolution du CA entre n-1 et n (%)		127.30 %	111.42 %	14.51 %	123.22 %

La pratique des indicateurs mobilisant les pourcentages tels que la part du CA ou les taux d'évolution est essentielle et doit être réalisée très régulièrement. Les contextes peuvent être multipliés pour favoriser une aisance calculatoire.

Exemple :
L'association propose tous les jeudis du 20 juillet au 24 août 2023, à partir de 20h30, des concerts.
Les tarifs proposés :

Plein tarif : 7 €   Tarif Réduit : 3,50 € (enfants, étudiants et demandeurs d'emploi) | -5 ans : gratuit

Les coûts de ces concerts pris en charge par l'association

- **Artistes : 3 000 € pour la saison**
- **Frais de communication : 300 € pour la saison**
- **1 personnel saisonnier : 3h par concert dans une chapelle pour un coût de 12 € /h pour l'association.**
- **Pot de l'amitié à l'issue du concert pour un coût estimé à 1.50 €/personne présente (hors – de 5 ans)**

Les coûts fixes sont: 3 000 + 300 + (12X3X6) = 3 516 €
Les coûts variables dépendent du nombre d'entrées pour lesquels il faut considérer les « plein tarif » et « tarif réduit » au regard du pot de l'amitié à financer. La moyenne donne (7+3,50) / 2 = 5,25 et on peut estimer à 5,50 € par entrée car il y a un peu plus de plein tarif (cela reste à l'appréciation de l'organisateur en fonction de l'expérience). Le TMCV (taux de marge sur coût variable) est défini par $\frac{\text{recettes-dépenses}}{\text{recettes}} = \frac{5,50-1,50}{5,50} = 0,7272$.

Cela signifie que la marge que rapporte la vente d'une place, au regard du pot offert, est de 72,72%. Donc pour avoir une animation rentable, il faut que le chiffre d'affaires correspondant, appelé seuil de rentabilité (SR) (valeur à partir de laquelle l'action est rentable) soit tel que les coûts fixes (CF) vérifie : $\text{SR} \times 0,7272 = \text{CF} = 3516$, soit

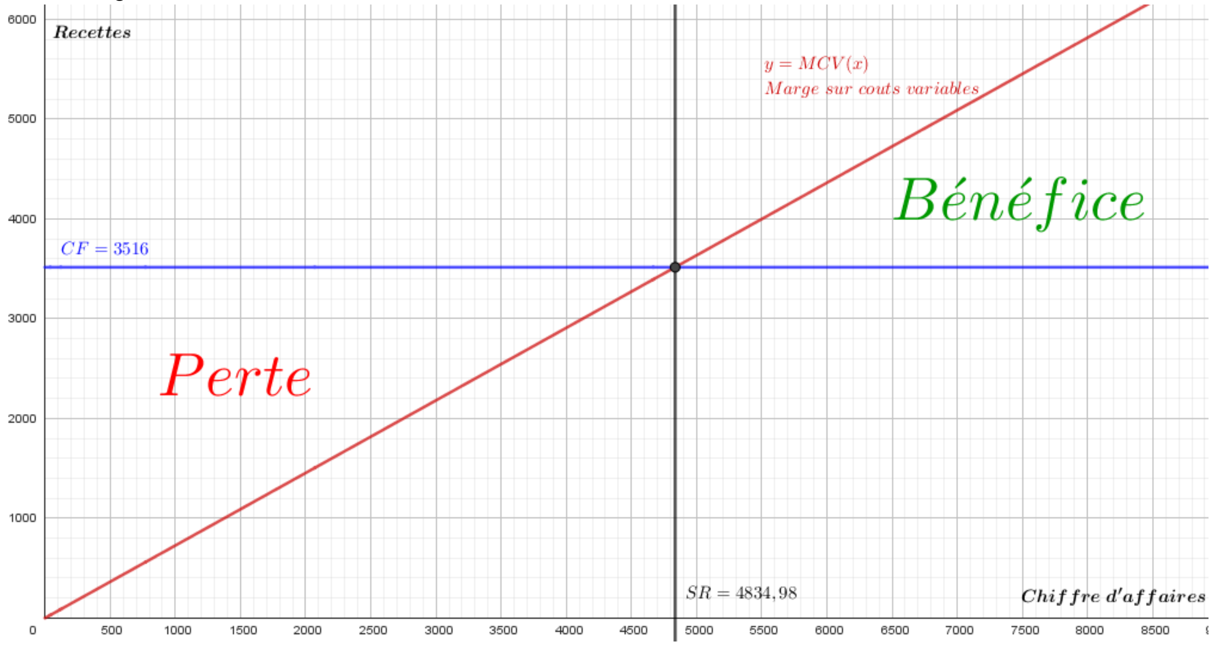
$$\text{SR} = \frac{\text{CF}}{0,7272} = \frac{3516}{0,7272} = 4834,984\text{€}.$$

En tenant compte du prix de vente de 5,50€ par place, pour être rentable , il faut avoir $\frac{\text{SR}}{\text{recettes}} = \frac{4834,984}{5,50} \approx 879,09$, soit 880 places sur l'ensemble des soirées, soit 147 entrée en moyenne par soirée.

La discussion sur la réalisabilité de ce nombre d'entrée au regard de la capacité d'accueil de la chapelle, la possibilité d'attirer autant de personnes en travaillant la communication, d'instaurer un système de réservation, … peut être aussi travaillée avec les autres enseignants des autres disciplines.

D'autres indicateurs tels que la marge de sécurité (part de chiffre d'affaires supérieure au seuil de rentabilité), l'indice de sécurité (marge de sécurité exprimée en pourcentage du chiffre d'affaires), … permettent de contextualiser autant de situations pour donner du sens à la pratique des outils mathématiques.

Il est possible de donner un sens mathématique au TMCV (ici 0,7272) puisque c'est le coefficient directeur de la droite modélisant la marge sur coûts variables



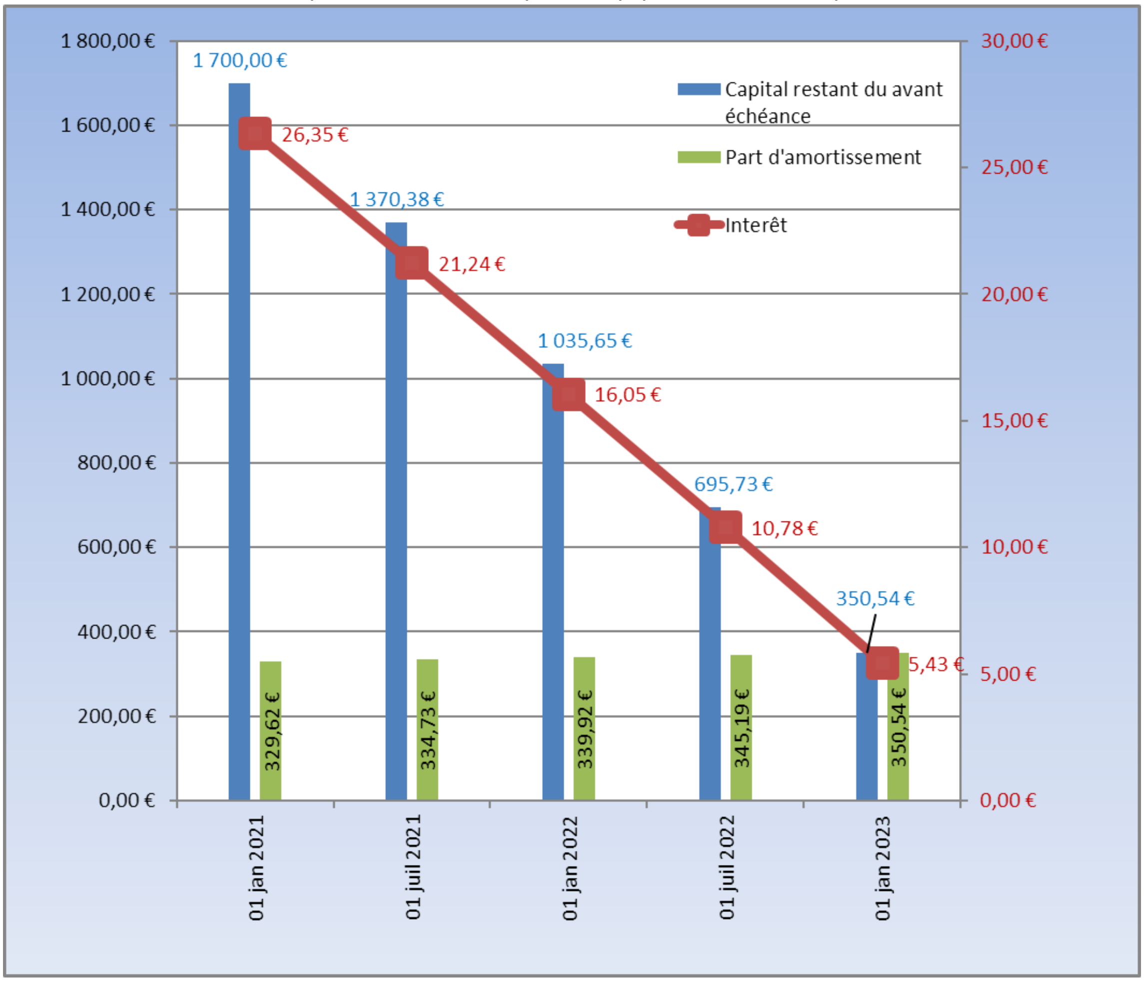
Sources :
Exercices corrigés d'analyse financière de Béatrice et François GRANDGUILLOT
Exemple CCF M57 DATR 2023, à partir des données :
[ASSOCIATION LES LANDES - Comptes - Exercice clos au 31 décembre 2021 - Parue le 1 décembre 2022 (journal-officiel.gouv.fr)]

Analyse financière d'un projet

Comme pour chacune des capacités dans lesquelles les mathématiques interviennent, l'approche doit être progressive et concrète dans un premier temps avant de donner la démarche théorique et les formules mathématiques utilisées. L'enseignement des mathématiques est ici encore en appui de ce qui aura été enseigné sur ce qu'est un amortissement d'emprunt, une échéance (mensualité, trimestrialité, annuité, …). La difficulté de compréhension réside dans le fait que l'amortissement est la partie du capital qui est remboursée, qu'elle varie au cours du temps et que le reste du capital à rembourser est soumis pour chaque échéance au taux d'intérêt alors que l'échéance de remboursement reste constante. C'est l'occasion de montrer, face à l'impossibilité de le faire empiriquement, la nécessité du raisonnement mathématique.

- ***Première approche graphique pour comprendre le principe***

Voici un exemple de diagramme qui représente des données du tableau d'amortissement d'un emprunt de 1700 €, à 1,55% par semestre avec 5 échéances, contracté par une association pour s'équiper d'un nouveau percolateur.



La lecture graphique permet dans un premier temps de comprendre le fonctionnement du remboursement d'un prêt avant d'opérer les calculs qui justifieront les valeurs.
En janvier 2021, les intérêts à payer sont de 1700 € ×0,0155 = 26,35 € et l'amortissement de 329,62 € (dont on verra juste après comment le calculer), soit une semestrialité de 329,62 + 26,35 = 355,97 €.
Le capital restant dû est 1700 € – 329,62 € = 1370,38 €.
Ce capital restant à rembourser est soumis également au taux de 1,55%, donc les intérêts sont 21,24 € au semestre suivant. La semestrialité constante de 355,97 € est décomposée en intérêts de 21,24 € et donc l'amortissement de 355,97 € – 21, 24 € = 334,73 €.
A noter qu'au fil du temps, comme l'échéance est constante, les intérêts diminuent et l'amortissement du capital à rembourser augmente.

- ***Deuxième approche pour comprendre le calcul de l'échéance.***

Pour le calcul de l'échéance E de l'exemple précédent, la modélisation sous forme de suite s'impose. C_n est le capital restant à rembourser lors de la n-ième échéance et il est à chaque fois soumis au taux d'intérêt de 1,55 %. Par définition C_0 = 1 700 et C_5 = 0 puisqu'il y a 5 échéances.

$$C_1 = C_0\left(1+\frac{1,55}{100}\right) - E = 1700\times 1,0155 - E$$

$$C_2 = C_1\left(1+\frac{1,55}{100}\right) - E = (1700\times 1,0155 - E)\times 1,0155 - E = 1700\times 1,0155^2 - E\times 1,0155 - E$$

$$C_3 = C_2\left(1+\frac{1,55}{100}\right) - E = (1700\times 1,0155^2 - E\times 1,0155 - E)\times 1,0155 - E = 1700\times 1,0155^3 - E\times 1,0155^2 - E\times 1,0155 - E$$

Ainsi, par un raisonnement itératif :

$C_5 = 1700\times 1,0155^5 - E\times 1,0155^4 - E\times 1,0155^3 - E\times 1,0155^2 - E\times 1,0155 - E = 0$,

soit $1700\times 1,0155^5 = E\times 1,0155^4 + E\times 1,0155^3 + E\times 1,0155^2 + E\times 1,0155 + E \approx 5,15742E$, soit E ≈ 355,97 €

Les amortissements du capital, pour chaque échéance, se déduisent par soustraction des intérêts à l'échéance.

- ***Construction d'un tableau d'amortissement avec un tableur***

Un emprunt de 25000€ est contracté au taux de 1,1% annuel sur une durée de 36 mois afin de financer la rénovation d'un local. Les remboursements s'effectueront le 1er de chaque mois à partir du mois de janvier.

Le taux mensuel équivalent est $\left(1+\frac{1,1}{100}\right)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0,000912 = 0,0912\%$. Mais l'usage veut que le taux mensuel équivalent moyen utilisé soit $\frac{1,1}{12} = 0,091666... \approx 0,0917$, valeur très proche car les valeurs des taux sont proches de 0.

Par analogie avec ce qui a été fait sur l'exemple précédent et en lien avec les connaissances sur les suites géométriques, l'échéance (ici la mensualité) se détermine en résolvant l'équation :

$$25000\times 1,000912^{36} = E\times 1,000917^{35} + E\times 1,000917^{34} + ... + E\times 1,000917 + E = \frac{1-1,000917^{36}}{1-1,000917}E$$

Soit E ≈ 706,28 €

Cette échéance est constituée de l'amortissement A_n du capital C_n à rembourser et de la part d'intérêt I_n lors du règlement de n-ième échéance.

$C_n = 1,000917C_{n-1} - E \qquad I_n = 0,000917C_n \qquad A_n = E - I_n$

Ces relations de récurrence permettent de remplir ce qui est appelé « tableau d'amortissement » dont on fixe les paramètres au début.

	A	B	C	D	E
1	Montant du prêt	Taux annuel	Taux mensuel équivalent	Durée du prêt en mois	Mensualité
2	25000	0,011	0,000916667	36	=VPM($C$2;$D$2;$A$2)*(-1)
3					VPM(taux; **npm**; va; [vc]; [type])

<u>*1ère étape : Calcul du taux (ici mensuel équivalent)*</u>.

Dans le cellule C2 entrer : **=$B$2/12**

<u>*2ème étape : Calcul du montant de l'échéance (ici mensualité) en utilisant la fonction VPM (Valeur de PaieMent)*</u>

Dans la cellule E2 entrer : **=VPM($C$2;$D$2;$A$2)*(-1)** (la multiplication par -1 permet d' obtenir un nombre positif)

La fonction **VPM** donne la valeur de l'échéance dont on peut démontrer l'expression :

$$E = C_0\frac{t\left(1+\frac{t}{100}\right)^n}{\left(1+\frac{t}{100}\right)^n - 1} = C_0\frac{t}{1-\left(1+\frac{t}{100}\right)^{-n}}$$

Cette expression n'est pas à connaitre mais elle doit être expliquée à l'aide d'un travail sur la somme des termes de suites géométriques qui a permis son élaboration.

La suite de la construction du tableau d'amortissement se fait en tenant compte des relations de récurrence après avoir inscrit dans les cellules A5 à A40 les dates d'échéances du 1er janvier 2021 au 1er décembre 2023.

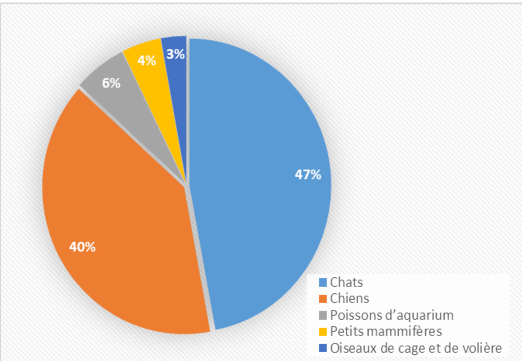
	A	B	C	D	E	F
1	Montant du prêt	Taux annuel	Taux mensuel équivalent	Durée du prêt en mois	Mensualité (Échéance)	
2	25000	0,011	0,000916667	36	706,28 €	
3						
4	Mensualité	Capital restant dû avant échéance	Intérêt	Part d'amortissement	Mensualité (Échéance)	Capital restant dû après échéance
5	01/01/2021	25000	22,92	683,37 €	706,28 €	24 316,63 €
6	01/02/2021	24 316,63 €	22,29	683,99 €	706,28 €	23 632,64 €
7	01/03/2021	23 632,64 €	21,66	684,62 €	706,28 €	22 948,02 €
8	01/04/2021	22 948,02 €	21,04	685,25 €	706,28 €	22 262,77 €
9	01/05/2021	22 262,77 €	20,41	685,88 €	706,28 €	21 576,89 €
10	01/06/2021	21 576,89 €	19,78	686,51 €	706,28 €	20 890,39 €
11	01/07/2021	20 890,39 €	19,15	687,13 €	706,28 €	20 203,25 €
12	01/08/2021	20 203,25 €	18,52	687,76 €	706,28 €	19 515,49 €
13	01/09/2021	19 515,49 €	17,89	688,39 €	706,28 €	18 827,09 €
14	01/10/2021	18 827,09 €	17,26	689,03 €	706,28 €	18 138,07 €
15	01/11/2021	18 138,07 €	16,63	689,66 €	706,28 €	17 448,41 €
16	01/12/2021	17 448,41 €	15,99	690,29 €	706,28 €	16 758,12 €
17	01/01/2022	16 758,12 €	15,36	690,92 €	706,28 €	16 067,20 €
18	01/02/2022	16 067,20 €	14,73	691,56 €	706,28 €	15 375,64 €
32	01/04/2023	6 327,52 €	5,80	700,48 €	706,28 €	5 627,04 €
33	01/05/2023	5 627,04 €	5,16	701,13 €	706,28 €	4 925,91 €
34	01/06/2023	4 925,91 €	4,52	701,77 €	706,28 €	4 224,14 €
35	01/07/2023	4 224,14 €	3,87	702,41 €	706,28 €	3 521,73 €
36	01/08/2023	3 521,73 €	3,23	703,06 €	706,28 €	2 818,67 €
37	01/09/2023	2 818,67 €	2,58	703,70 €	706,28 €	2 114,97 €
38	01/10/2023	2 114,97 €	1,94	704,35 €	706,28 €	1 410,63 €
39	01/11/2023	1 410,63 €	1,29	704,99 €	706,28 €	705,64 €
40	01/12/2023	705,64 €	0,65	705,64 €	706,28 €	0,00 €

- **Du côté des automatismes, exemples de « questions flash ».**

Pour l'enseignement de cette capacité, il paraît utile de privilégier les automatismes relatifs aux sens des opérations, calculs de proportions et pourcentages, applications de formules, calculs statistiques.
Exemples :

- Déterminer le taux équivalent à une diminution de 25 % suivie d'une autre augmentation de 20 %.
- On propose 15€ de réduction sur un article vendu 60€. Donner le taux de remise.
- Dans le cas du remboursement d'un prêt de capital *C* en euros, sur *n* mois au taux annuel *t* %, la mensualité *m* se calcule par la formule $m = \dfrac{C \times \dfrac{t}{1200}}{1-\left(1+\dfrac{t}{1200}\right)^{-n}}$.

  Calculer la mensualité correspondant au remboursement du prêt d'un capital de 170 000 euros sur 17 ans au taux de 2,5% annuel.
- Le chiffre d'affaires des animaux de compagnie s'élève à 4 milliards d'euros (source Prom'animal 2017) et se répartit comme l'indique le diagramme :
  Donner le chiffre d'affaire réalisé par espèce.



- Estimer la superficie d'un local rectangulaire de 12 m sur 5 m
- …