Document d'accompagnement thématique

MINISTÈRE DE L'AGRICULTURE DE LA SOUVERAINETÉ ALIMENTAIRE ET DE LA FORÊT
Liberté Égalité Fraternité

ENSEIGNEMENT AGRICOLE L'AVENTURE DU VIVANT LES MÉTIERS GRANDEUR NATURE

Inspection de l'enseignement agricole

Diplôme : BTSA GDEA

Thème : Enseignement de mathématiques

Commentaires, recommandations pédagogiques

L'enseignement des mathématiques doit contribuer, notamment en lien avec les disciplines professionnelles, à l'acquisition des capacités :

C41- Expliciter l'utilisation d'une technologie dans un contexte de production

C42- Mettre en condition opérationnelle un équipement

C62- Proposer une offre de services à partir de données numériques agricoles, environnementales ou issues des équipements connectés

C71- Réaliser une démonstration d'agroéquipements

L'enseignement des mathématiques vise à donner une assise scientifique permettant de développer la pensée critique devant les résultats d'expérimentation ou encore de communiquer des résultats chiffrés sous une forme adaptée. L'enseignement s'appuie sur les acquis des apprenants pour développer de nouveaux outils mathématiques dans le but de répondre à des problématiques professionnelles. La mobilisation de ces outils dans le cadre de la résolution de problèmes concourt à la validation des capacités professionnelles susvisées.

L'enseignement des mathématiques est étroitement lié à l'enseignement des disciplines professionnelles. Sa mise en œuvre s'appuie fortement sur les situations professionnelles enseignées.

La progression construite par le professeur de mathématiques devra être en lien direct avec celle proposée par les collègues de disciplines professionnelles.

La résolution de problèmes demande de mobiliser des techniques calculatoires. Les calculs, pour une grande partie, peuvent être délégués à un outil de calcul. Il ne s'agit pas ici de développer une virtuosité procédurale, mais plutôt d'amener les apprenants à se positionner comme observateur et à se questionner sur les processus mis en œuvre dans le domaine professionnel. La recherche de réponses amène naturellement à élaborer des démarches, à mener des calculs à l'aide d'un outil adapté, à s'assurer de la cohérence de résultats et à prendre des décisions.

L'institutionnalisation des notions, phase indispensable dans le processus d'apprentissage, a pour but d'expliciter les savoirs et les savoir-faire qui ont été mobilisés pendant la séance ou séquence afin qu'ils puissent être réinvestis dans de nouvelles situations et de donner des repères simples aux apprenants. Ce temps doit être court et synthétique. Les développements théoriques sont réduits à l'essentiel et toujours présentés dans un cadre accessible.

Des mathématiques transversales à tous les blocs de compétences.

L'acquisition des capacités professionnelles demande d'aborder de nouvelles notions qui s'appuient de façon implicite sur des connaissances mathématiques acquises dans les classes antérieures du collège et du lycée. Certaines difficultés d'apprentissage de ces nouveaux concepts proviennent d'un manque de maîtrise de ces prérequis. Il est indispensable d'y consacrer régulièrement du temps afin de réactiver et consolider ces savoirs sans entrer dans un schéma de révision. Le choix de réinvestir les notions transversales suivantes est décidé en fonction de la progression définie en cohérence avec les disciplines professionnelles :

- Proportion, pourcentage et proportionnalité.
- Sens des opérations, application de formule, représentation graphique de fonctions et exploitation graphique.
- Représentations de diagrammes statistiques pertinents, interprétation et utilisation d'indicateurs statistiques.
- Probabilités élémentaires, lien entre fréquences et probabilités, arbres de probabilités.

Afin que les élèves soient aguerris aux pratiques calculatoires élémentaires favorisant l'acquisition des capacités, des automatismes mathématiques doivent être développés par un travail régulier, afin d'obtenir une aisance suffisante, en s'appuyant préférentiellement sur des situations en lien avec les disciplines professionnelles.

Au-delà d'une pratique dans toutes les activités de la classe, il est aussi important d'entretenir ces automatismes par des rituels de début de séance, sous forme de « questions flash » privilégiant l'activité mentale avec un recours à des connaissances, des procédures, des méthodes et des stratégies fondamentales dans la pratique professionnelle. Cela ne doit pas faire l'objet d'un chapitre d'enseignement spécifique car les notions qui les sous-tendent ont été travaillées dans les classes antérieures. Cette pratique, propre à chaque enseignant, doit s'adapter aux besoins de la spécialité.

Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs mais donnent une orientation de ce qui peut être fait.

Parmi elles, certaines doivent être propices au calcul mental.

- Sens des opérations qui permet d'effectuer des calculs courants.
- Calculer une moyenne, une moyenne pondérée.
- Passer d'une proportion (1/2, 3/4, 1/5, …) à un pourcentage (50 %, 75 %, 20 %, …) et inversement.
- Calcul de pourcentages, calcul de prix TTC à partir d'un prix HT et inversement, avec des taux de TVA différents.
- Lier augmentation et diminution en pourcentage avec coefficient multiplicateur et les utiliser en situation.
- Comparer en situation des proportions et des pourcentages.
- Appliquer des formules et déterminer la valeur numérique d'une grandeur connaissant les autres. A cet effet, on peut mobiliser, par exemple, la loi d'Ohm, la formule du nombre de Reynolds ou encore la loi de Poiseuille.
- Reconnaître graphiquement des fonctions de référence, en décrire les variations et les extremums.
- Lire graphiquement la pente d'une droite, la pente en un point de la représentation graphique d'une fonction, repérer les points d'inflexion et la concavité d'une courbe en lien avec la « diminution d'une augmentation » ou « la diminution d'une baisse » …
- Choisir une représentation graphique adaptée pour représenter des données, des proportions ou des pourcentages (graphique, diagramme circulaire, semi-circulaire, diagramme en bâton ou en barres, barres empilées, …).
- Inversement, interpréter des diagrammes et retrouver des données statistiques à partir de représentations.
- Déterminer des longueurs ou des angles dans un triangle rectangle à l'aide de la trigonométrie.

Les outils numériques doivent être intégrés à l'enseignement des mathématiques. Ils apportent une plus-value permettant d'aborder de véritables problèmes issus des situations professionnelles. L'usage des outils numériques tels que le tableur, les logiciels de traitement de données statistiques, de sondage, de cartographie, … doit être pensé dans l'optique de résoudre des problèmes qui n'auraient pas été accessibles sans ces outils. La maîtrise des outils numériques n'est pas un but de l'enseignement des mathématiques. La calculatrice reste aussi un outil facilement mobilisable en classe. Cela n'est pas contradictoire avec une pratique du calcul mental régulière mais raisonnée, tant par la difficulté des questions posées que le contexte de sa pratique.

L'enseignement des mathématiques contribue à l'atteinte des capacités C41, C42, C62 et C71 en participant à la compréhension et l'appropriation du fonctionnement des matériels à des fins d'utilisation, de réglage ou de paramétrage. A cet effet, la mobilisation d'objets mathématiques spécifiques permet de donner une assise scientifique éclairant les savoir-faire techniques. Les activités d'apprentissage s'appuient sur des situations issues de l'enseignement des STE ou de Sciences Physiques et en relation avec le fonctionnement et l'utilisation des agroéquipements. Elles permettent le passage du cas singulier vers des concepts généraux. La formalisation des savoirs, nécessaire à leur structuration et leur stabilisation, intervient en second lieu après un temps de découverte.

C41- Expliciter l'utilisation d'une technologie dans un contexte de production

L'enseignement des mathématiques contribue à l'atteinte de la capacité C41 en participant à la compréhension et l'appropriation des concepts sous-jacents aux technologies : vecteurs, fonctions, équations différentielles et algèbre de Boole.

Les **vecteurs** sont principalement manipulés dans le plan. Toutefois, dans des cas particuliers, il est possible d'aborder les vecteurs dans l'espace. Ces notions sont mobilisées dans le cadre de la mécanique du solide. Les vecteurs sont étudiés sous différents angles : géométriquement, en tant que flèches portant 3 informations (direction, sens et longueur) ; algébriquement (opérations sur les vecteurs, relation de Chasles) ; et analytiquement, en utilisant les coordonnées dans une base. Il s'agit principalement d'effectuer la somme de vecteurs et de décomposer un vecteur dans une base donnée du plan par projection sur les axes. Il importe d'établir un lien systématique entre le registre graphique et le registre analytique. Notamment, le domaine graphique joue un rôle crucial dans la compréhension intuitive des résultats et doit orienter les calculs. L'objectif de l'enseignement des vecteurs est d'apporter un cadre permettant leur utilisation en physique dans des problèmes de 2 à 4 forces mobilisant les moments des forces tout en restant dans le plan. Dans cette perspective, l'utilisation du produit scalaire en relation avec les projections orthogonales des vecteurs aide à fournir aux apprenants un outil efficace. Il n'est pas attendu de développer toutes les propriétés du produit scalaire ainsi que de résoudre un grand nombre d'exercices de géométrie plane. Toutefois, il importe de remobiliser la trigonométrie dans le triangle rectangle. En revanche, la formule d'Al Kashi n'a pas de véritable raison d'être ici. Le produit vectoriel n'a pas lieu d'être enseigné car les problèmes restent dans le plan. Toutefois, pour des apprenants ayant des projets de poursuite d'étude, il est envisageable de l'aborder.

Les **équations différentielles** sont vues comme un objet de modélisation. Les exemples issus de la physique ou des agroéquipements participent à l'étude des mouvements et dans une moindre mesure lors de l'étude des oscillateurs électriques. L'objectif principal est de se familiariser avec cet objet et ainsi d'être capable de reconnaitre et de classer une équation différentielle de façon simple (degré, linéaire ou non, coefficients constants ou non). La résolution des équations différentielles n'est pas attendue. Toutefois, vérifier qu'une fonction est bien solution d'une équation différentielle dans des cas simples est nécessaire. La construction pas à pas d'une courbe solution intégrale d'une équation différentielle peut être envisagée dans des situations simples en utilisant une méthode d'approximation telle que la méthode d'Euler ou de Runge-Kutta d'ordre 2. Ce procédé permet de montrer qu'il est tout à fait possible d'exploiter une équation différentielle sans savoir la résoudre exactement. Notamment des hypothèses sur le comportement des solutions d'une équation différentielle à partir des conditions initiales peuvent être émises. Par ailleurs, la solution exacte d'une équation différentielle peut être obtenue par un logiciel de calcul formel (par exemple https://www.wolframalpha.com/). En outre, la construction de champs de vecteurs associés à une équation différentielle offre des possibilités de réinvestissement des différentes notions.

Tout ce travail présuppose des connaissances sur les fonctions et leurs représentations, notamment les fonctions **puissances**, **trigonométriques**, **exponentielles** et **logarithmes**. Il est aussi indispensable de réactiver, de consolider et de renforcer les savoirs portant sur la notion de nombre dérivé et d'illustrer l'approximation affine d'une fonction dérivable en un réel a en lien avec la tangente à la courbe représentative au point de coordonnées $(a, f(a))$. Les rituels de début de séance sont des opportunités pour effectuer ce travail. La lecture des caractéristiques d'une fonction à partir de sa représentation graphique est un incontournable. Notamment, l'étude des courbes de fonctions trigonométriques $x \mapsto \cos(wt + \alpha)$ ou $x \mapsto \sin(wt + \alpha)$ permet d'aborder les notions de période, de fréquence et de déphasage en lien avec les oscillateurs mécaniques ou électriques. Au-delà de l'étude globale des fonctions se limitant à déterminer les variations sur un intervalle, l'accent doit être mis sur l'étude locale avec en particulier la lecture du nombre dérivé en lien avec une vitesse de croissance, le repérage des changements de tendance mobilisant les notions de convexité et points d'inflexion. La formalisation de ces deux dernières notions ne doit pas faire l'objet d'un développement théorique approfondi, il s'agit d'en donner une définition mobilisable permettant une identification sans ambiguïté sur les représentations graphiques. Par ailleurs, il importe de mobiliser des représentations graphiques comportant plusieurs unités sur l'axe des ordonnées afin de croiser par exemple les courbes de puissance (en kW), de couple (en N.m), de consommation (en L/h) d'un moteur en fonction de son régime (en tours/min).

L'**algèbre de Boole** est le cadre théorique pour modéliser les portes logiques des circuits électriques. Les étudiants doivent être familiarisés avec les notations suivantes des valeurs de vérité $\{0,1\}, \{Faux, Vrai\}, \{F, V\}, \{\ False, True\}, \{F, T\}$. L'opérateur logique unaire de négation noté $non, \neg, \overline{\ }$ et les deux opérateurs logiques binaires, la *conjonction* et la *disjonction,* servent de base à l'écriture des fonctions logiques. La construction d'une table de vérité à partir d'une fonction logique à 2 ou 3 variables est un attendu, tandis que l'écriture d'une fonction logique à partir d'une table de vérité à 2 ou même 3 variables est souhaitable en retour. Les propriétés d'associativité, de commutativité, distributivité, ainsi que l'idempotence et les lois de **Morgan** permettent la simplification des écritures des fonctions logiques. Il peut être judicieux d'introduire les tables de **Karnaugh** pour simplifier une fonction logique à partir de sa table. Aucune virtuosité technique n'est attendue. Il s'agit dans des cas simples ne présentant pas de difficultés de réduire l'écriture d'une fonction logique à 2 ou 3 variables. Les apprenants doivent être familiarisés aux différentes notations des opérateurs *disjonction* et *conjonction* à savoir $(+, .)$, $(\cup, \cap)$, (ou, et), (or, and) voire (max, min). Il peut être intéressant de définir l'opérateur binaire de *disjonction exclusive* que l'on peut noter $\oplus$, $\vee$,. XOR qui est fortement utilisé dans les portes logiques des circuits électriques.

La construction de tables de vérité pour les fonctions logiques amène à aller vers la programmation en **Python**. Les apprenants entrant en BTSA ont été sensibilisés au langage Python dans leur formation précédente. Il s'agit ici de réinvestir et approfondir leur connaissance sur le langage. Les besoins essentiels sont l'utilisation de variables numériques et booléennes, la structuration d'un script à l'aide d'une ou plusieurs fonctions Python, la maitrise des instructions conditionnelles et des boucles bornées.

C42- Mettre en condition opérationnelle un équipement

L'enseignement des mathématiques contribue à confronter les apprenants au procédé d'**étalonnage** et vérification d'un appareil de mesure et de se familiariser avec les notions de **sensibilité**, **justesse**, **répétabilité** et **incertitude** en relation avec les **indicateurs statistiques**.

Le vocabulaire de la métrologie est spécifique, il est nécessaire d'y familiariser les apprenants. On peut se limiter aux termes suivants :

- Le *mesurage* : processus permettant de déterminer expérimentalement une ou plusieurs valeurs d'une grandeur physique.
- Le *mesurande* : grandeur physique soumise à l'opération de mesurage (longueur, masse, intensité, résistance, pression...)
- La *valeur vraie* : valeur du mesurande que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait. Un mesurage n'étant jamais parfait, cette valeur est toujours inconnue. On parle également de « valeur théorique ».

Pour les capteurs et les instruments de mesure, l'étalonnage permet notamment d'estimer l'erreur et de la compenser en appliquant une correction. La vérification permet de confirmer que l'erreur de mesure reste plus petite qu'une erreur appelée erreur maximale tolérée. L'erreur maximale tolérée est définie par l'utilisateur comme étant la plus grande erreur qu'il est prêt à accepter.
Pour estimer l'erreur, la procédure d'étalonnage d'un instrument consiste à appliquer un mesurande connu en entrée du système de mesure et de comparer la sortie à la valeur attendue. Lorsque l'on applique plusieurs fois le même mesurande en entrée du système dans des conditions de répétabilité, bien souvent la réponse n'est pas identique. Il existe en effet des différences qui sont dues à deux composantes : l'erreur systématique et l'erreur aléatoire.
Si on note M la **variable aléatoire**, qui à chaque mesurage d'un même mesurande dans les mêmes conditions associe la valeur du mesurage, l'**espérance** $E(M)$ permet naturellement de donner une valeur théorique au mesurage. La modélisation par la variable aléatoire M des résultats des mesurages conduit à étudier deux distributions de probabilités, la loi normale et la loi uniforme. On peut consulter à cet effet le site suivant https://culturemath.ens.fr/thematiques/lycee/de-l-aleatoire-dans-les-mesures qui présente des notions mathématiques mises en jeu au-delà des besoins de la capacité C42.

On considère alors :

- L'erreur aléatoire ou erreur de répétabilité. Elle provient essentiellement des variations temporelles et spatiales non prévisibles des grandeurs d'influence. Il n'est pas possible de compenser l'erreur aléatoire d'un résultat de mesure. L'erreur aléatoire se définit comme la différence entre une mesure et la moyenne d'un nombre infini de mesurages du même mesurande. $E_a = M - E(M)$. E_a est une variable aléatoire d'espérance nulle et est distribuée le plus souvent suivant une **loi normale**. $E(M)$ n'est pas accessible mais peut être estimée par la moyenne empirique ou par un intervalle de confiance. A cet effet, il est important de développer une représentation de la **fluctuation d'échantillonnage** d'une moyenne par des simulations et de faire émerger **l'intervalle de confiance** d'une moyenne. Les théorèmes sous-jacents sont le **théorème central limite** et la **loi des grands nombres**.

- L'erreur systématique ou erreur de justesse. C'est une erreur constante qui affecte chacune des mesures. Elle ne peut pas être réduite en augmentant le nombre de mesures, mais par application d'une correction. L'erreur systématique est définie comme la différence de la moyenne d'un nombre infini de mesurages du même mesurande et la *valeur vraie* $E_s = E(M) - V_{vraie}$. Un des objectifs de l'étalonnage est de déterminer si l'erreur systématique est significative au regard de la précision requise du mesurage et de l'éliminer par une correction. On peut alors être amené à déterminer le caractère significatif de l'erreur systématique en vérifiant si la *valeur vraie* du mesurande étalon est dans l'intervalle de confiance de la moyenne, ou en mettant en œuvre un **test de Student** dans le cas d'une distribution normale de M ou si l'échantillon des mesures est suffisamment grand. Dans le cas d'une correction de l'erreur systématique, il importe de faire prendre conscience que la correction n'est pas parfaite car $\widehat{m}$ l'estimateur obtenu sur un échantillon de taille N de $E(M)$ est entaché d'incertitude.

L'erreur de mesure est donc $E = M - V_{vraie} = (M - E(M)) + (E(M) - V_{vraie})$.
Toute mesure étant incertaine, il s'agit d'évaluer l'incertitude par des méthodes statistiques (ce que l'on nomme évaluation de type A). Il importe de faire le lien entre incertitude et variabilité de la réponse de l'appareil pour un mesurande donné. On suppose dans la suite que l'erreur systématique est nulle et seule l'erreur aléatoire contribue à l'erreur de mesure. L'incertitude de type A est évaluée à partir de N mesurages du même mesurande. Si M suit une loi normale, on peut se convaincre par des simulations que l'intervalle $[\widehat{m} - k.s\ ,\ \widehat{m} + k.s]$ (où $\widehat{m}$ est la moyenne empirique et s^2 la variance corrigée obtenue à partir de N mesurages du même mesurande, N suffisamment grand) contient environ 95% des résultats des mesurages lorsque $k = 2$ et 99% lorsque $k = 3$.
On appelle alors incertitude type pour un mesurage l'écart type de M qui est estimé avec s sur N mesurages, le coefficient k est appelé facteur d'élargissement et $k.s$ est appelée incertitude élargie. Pour un niveau de confiance donnée, la valeur d'un mesurage est alors exprimée sous la forme :

$$(valeur\ lue) unité\ \pm (incertitude\ élargie)\ unité\ (facteur\ d'élargissement)$$

Parfois, le résultat du mesurage est une moyenne de n valeurs. L'incertitude type pour ce mesurage est alors $\frac{s}{\sqrt{n}}$

Il existe d'autres sources d'erreur que les grandeurs d'influence. Par exemple, les appareils de mesure renvoient des valeurs dans un ensemble discret. On peut alors définir un pas de mesure qui est le plus petit écart mesurable que l'on nomme résolution. Si la résolution de l'appareil est δ, la valeur vraie du mesurande qui produit le résultat m peut se situer avec une égale probabilité à n'importe quel endroit de l'intervalle $\left[m - \frac{\delta}{2}, m + \frac{\delta}{2}\right]$. Le calcul de l'écart type d'une loi uniforme permet de définir l'incertitude liée à la résolution. Cet écart type peut très bien être estimé par des simulations plutôt que calculé avec une intégrale. Les méthodes sont à adapter au regard des profils des apprenants et de la situation professionnelle étudiée. Ces méthodes de quantification des incertitudes issues directement du processus de mesurage sont dites de type B.
Pour aller plus loin, il est possible d'évoquer les incertitudes composées, par exemple lorsqu'une grandeur est calculée à partir de la somme de deux grandeurs mesurées. La formule de la variance d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes permet de calculer l'incertitude composée.

Pour aller plus loin, deux ressources sur la mesure et les incertitudes en physique-chimie dans l'enseignement général sur Eduscol : document 1 , *Mesure et incertitude au lycée* du groupe IREM de l'Université de Paris et document 2., *Mesure et incertitudes* de la DGESCO.

L’étalonnage d'un capteur consiste aussi à établir une relation entre les grandeurs d'entrée et de sortie c’est-à-dire à modéliser le signal de sortie du capteur en fonction de la variable mesurée. En entrant différentes valeurs connues et en les associant à leur valeur en sortie, on peut alors construire un nuage de points et modéliser par une fonction les valeurs de sortie en fonction de la variable d’entrée. Dans le cadre de l’enseignement du bloc 4, seul le modèle linéaire est à utiliser. A cet effet, plusieurs méthodes de détermination de **droite de régression** sont à exploiter (au jugé, droite de Mayer, moindres carrés). En ce qui concerne la droite des moindres carrés, comme on suppose que les valeurs en entrée ne sont pas entachées d’erreurs, il convient d’utiliser la régression de y en x. La droite d’étalonnage obtenue par régression linéaire est comparée aux valeurs attendues et permet d’identifier les erreurs de justesse, les dérives de sensibilité mais aussi de réaliser des prévisions. Dans ce cadre, le coefficient directeur, l’ordonnée à l’origine et le coefficient de détermination sont à interpréter.
Le Bureau international des poids et mesures (BIPM) publie des guides sur la mesure et les incertitudes, accessibles à l’adresse : https://www.bipm.org/fr/publications/guides/

C62- Proposer une offre de services à partir de données numériques agricoles, environnementales ou issues des équipements connectés
C71- Réaliser une démonstration d’agroéquipements

L’enseignement des mathématiques dans les blocs 6 et 7 mobilise les outils développés dans le bloc 4. L’accent est mis notamment sur la représentation des fonctions et l’organisation des données, les ordres de grandeur en lien avec les unités, les variations en pourcentage et plus généralement la proportionnalité.

Exemple 1 : Transformation d'expressions en algèbre de Boole

On considère la fonction logique $f(p,q) = (p\ ou\ q)\ et\ (p\ ou\ non\ q)$

- Vérifier que $f(p,q)$ a la même table de vérité que p.
- Montrer par le calcul que $f(p,q) = p$.
  $f(p,q) = (p+q).(p+\bar{q}) = p^2 + p.(q+\bar{q}) + q.\bar{q}$ en utilisant le fait que $p^2 = p, q+\bar{q} = 1, q.\bar{q} = 0$

Exemple 2 : Programmation de fonctions booléennes

L'implication logique $p \Rightarrow q$ est définit par $(non\ p)\ ou\ q$.

- Ecrire une fonction Python nommée `implog()` prenant en entrée deux paramètres p et q à valeurs dans $\{0,1\}$ et renvoyant le résultat de $p \Rightarrow q$.
- Produire la table de vérité à l'aide de la fonction `implog()`.

```python
# -*- coding: utf-8 -*-
def implog(p,q):
    '''
    Parameters
    ----------
    p : 0 ou 1, False ou True
    q : 0 ou 1, False ou True

    Returns
    -------
    La valeur de vérité de p => q

    '''
    return int(not p or q)

for p in range(2):
    for q in range(2):
        print(p,q,implog(p,q))
```

- Produire la table de vérité de l'équivalence logique $p \Leftrightarrow q$ définit par $(p \Rightarrow q)\ et\ (q \Rightarrow p)$ à l'aide d'un script en Python.

```python
def equivalence(p,q):
    '''
    Parameters
    ----------
    p : 0 ou 1, False ou True
    q : 0 ou 1, False ou True

    Returns
    -------
    La valeur de vérité de p <=> q

    '''
    return implog(p,q) and implog(q,p)

for p in range(2):
    for q in range(2):
        print(p,q,equivalence(p,q))
```

- Montrer que $p \Leftrightarrow q$ est identique à $(p\ ou\ q) \Rightarrow (p\ et\ q)$
  $p \Longrightarrow q$ sécrit $non\ p\ ou\ q$ dont la traduction en algèbre de Boole est $\bar{p} + q$, de même $q \Longrightarrow p$ se traduit en $p + \bar{q}$. Ce qui donne $p \Leftrightarrow q$ se traduit par $(p+\bar{q}).(\bar{p}+q)$
  $(p+\bar{q}).(\bar{p}+q) = \bar{p}.\bar{q} + p.q$ car $p.\bar{p} = q.\bar{q} = 0$
  $\bar{p}.\bar{q} + p.q$ signifie $non(p\ ou\ q)\ ou\ (p\ et\ q)$ qui n'est rien d'autre que $(p\ ou\ q) \Rightarrow (p\ et\ q)$
  Une autre solution consiste à comparer les tables de vérité des deux expressions.
- Vérifier à l'aide d'un script Python, que $((p \Rightarrow q)\ et\ (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ est une tautologie.

```python
def f(p,q,r):
    '''
    Parameters
    ----------
    p : 0 ou 1, False ou True
    q : 0 ou 1, False ou True
    r : 0 ou 1, False ou True

    Returns
    -------
    La valeur de vérité de ((p=>q) et (q=>r))  => (p=>r)
    '''
    a=implog(p,q) and implog(q,r)
    b=implog(p,r)
    return implog(a,b)

for p in range(2):
    for q in range(2):
        for r in range(2):
            print(p,q,r,f(p,q,r))
```

Exemple 3 : Réalisation d'un circuit logique associé à une table de vérité

On considère la fonction logique f dont la table de vérité est

a	b	c	$f(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1

1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- Ecrire f sous forme d'une somme de produits.
  On repère les 1 dans la table de vérité d'où $f(a,b,c) = \bar{a}.\bar{b}.c + \bar{a}.b.\bar{c} + a.\bar{b}.\bar{c} + a.\bar{b}.c + a.b.\bar{c}$
- Construire la table de Karnaugh de f puis donner une expression simplifiée de $f(a,b,c)$.
  A partir de l'expression de f sous forme de somme on a :

	$b.c$	$\bar{b}.c$	$\bar{b}.\bar{c}$	$b.\bar{c}$
a	0	1	1	1
$\bar{a}$	0	1	0	1

Du fait de $a + \bar{a} = 1$ et $c + \bar{c} = 1$ on a $f(a,b,c) = \bar{b}.c + a.\bar{b} + b.\bar{c}$.

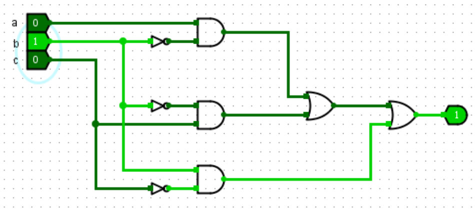
- Vérifier le résultat à l'aide d'une table de vérité qui peut être produite par un script Python.

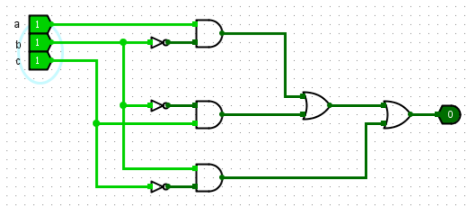
```python
def f(a,b,c):
    '''
    Parameters
    ----------
    a : 0 ou 1, False ou True
    b : 0 ou 1, False ou True
    c : 0 ou 1, False ou True

    Returns
    -------
    La valeur de vérité de a.not(b)+not(b).c+b.not(c)
    '''
    return int((a and not b) or (not b and c) or (b and not c))

for a in range(2):
    for b in range(2):
        for c in range(2):
            print(a,b,c,f(a,b,c))
```

- Réaliser le circuit correspondant à la fonction logique f.





Les diagrammes sont réalisés avec le logiciel Logisim accessible sur le site
https://ww2.ac-poitiers.fr/techno-si/spip.php?article348

Exemple 4 : Méthode d'Euler

La méthode d'Euler peut donner lieu à des activités encadrées, ambitieuses, mobilisant des savoirs et savoir-faire mathématiques, algorithmiques et numériques.

Prenons l'exemple de la position d'une bille en chute libre en fonction du temps subissant une résistance proportionnelle à la vitesse. On obtient l'équation différentielle (relation fondamentale de la dynamique)

$$m\frac{dv}{dt} = -\alpha v + mg \text{ avec } v(0) = 0$$

On peut ramener la recherche d'une solution à celle de l'équation différentielle $\frac{dy}{dt} = 1 - y$ avec $y(0) = 0$.

La méthode d'Euler s'appuie sur l'approximation affine $y(a+h) \approx y(a) + hy'(a)$. En posant, $t_{n+1} = t_n + h$ avec $t_0 = 0$ et $y(t_n) \approx y_n$ la méthode d'Euler donne le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} t_n = nh \\ y_0 = 0 \\ y_{n+1} = y_n + h(1 - y_n) \end{cases}$$

Le programme Python ci-dessous permet d'obtenir la courbe suivante répondant à la position de la bille en fonction du temps. L'objectif est de montrer que l'on peut produire la courbe approchée d'une solution sans résoudre l'équation différentielle. On peut aussi étendre à des exemples de la forme $y' = f(y,t)$ et ne pas se limiter uniquement à $y' = f(y)$.

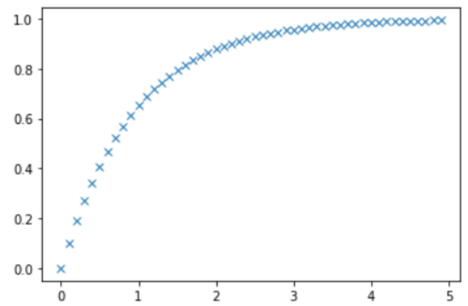
```
import matplotlib.pyplot as plt

def euler(pas,nombre,y0):
    result=[y0]
    yn=y0
    for i in range(nombre-1):
        yp=yn+pas*(1-yn)
        result.append(yp)
        yn=yp
    return result

pas=0.1
x=[i*pas for i in range(50)]
y=euler(pas,50,0)

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x,y,"x")

plt.show()
```



Il est possible d'étendre le procédé à des équations différentielles du 2e ordre. La complexité est ici bien plus grande et donc cette situation doit être traitée préférentiellement dans le but de faire monter en compétence des étudiants qui auraient des besoins pour leur poursuite d'étude.

La tension aux bornes du condensateur dans un circuit RLC vérifie l'équation différentielle :

$$E = LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c$$

Dans le cas de régime sans pertes, c'est-à-dire $R = 0$, on a $E = LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c$

On peut, pour simplifier, se limiter à étudier l'équation différentielle $y'' + y = 1$. Cette équation différentielle du 2nd ordre se ramène au système différentielle du 1er ordre suivant :

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = y'' = 1 - y \end{cases}$$

En appliquant une nouvelle fois l'approximation affine de u et y en $t_n = n \times h$ la méthode d'Euler donne le système itératif suivant :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hu_n \\ u_{n+1} = u_n + h(1 - y_n) \end{cases}$$

Le programme Python ci-dessous permet d'afficher la courbe d'une solution approchée pour les conditions initiales $y(0) = 0, y'(0) = 1$. Cette représentation permet d'effectuer le lien avec les fonctions sinusoïdales. Il pourra être intéressant alors de faire vérifier par le calcul ou un logiciel de calcul formel que les solutions de cette équation différentielle sont des fonctions sinusoïdales.

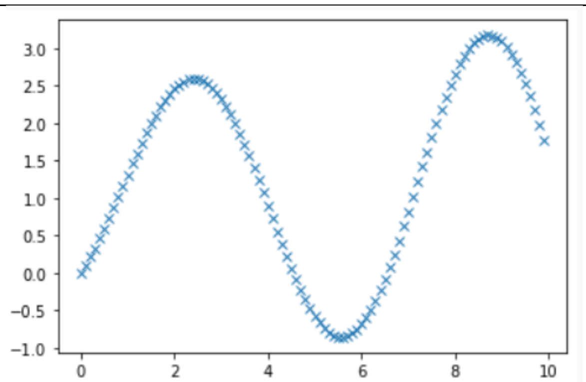
```
import matplotlib.pyplot as plt

def euler(pas,nombre,y0,u0):
    y=[y0]
    yn=y0
    un=u0
    for i in range(nombre-1):
        yp=yn+pas*un
        up=un+pas*(1-yn)
        y.append(yp)
        un=up
        yn=yp
    return y

pas=0.1
x=[i*pas for i in range(100)]
y=euler(pas,100,0,1)

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x,y,"x")

plt.show()
```



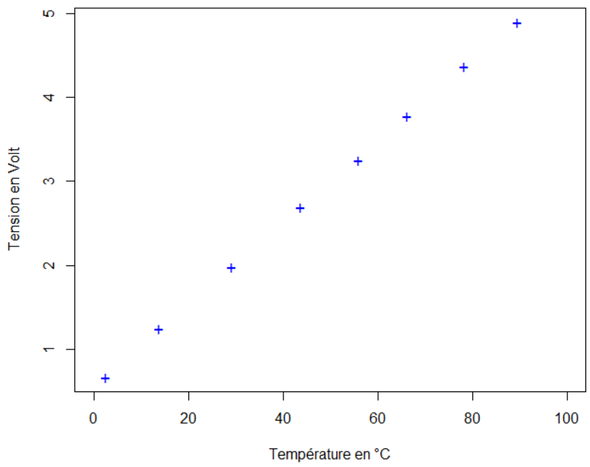
Exemple 5 : Transmetteur de température

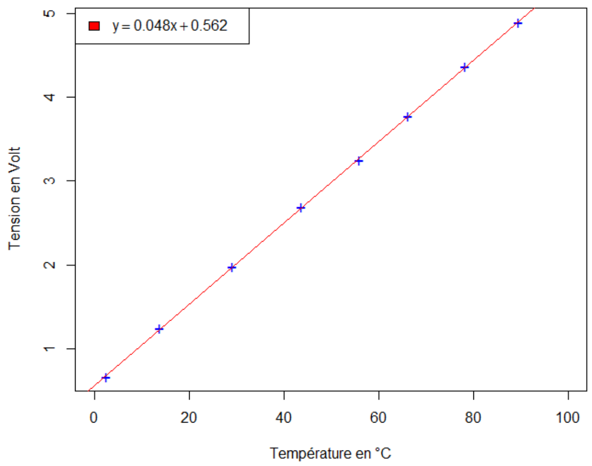
Une chaine de température est constituée d'un capteur de température résistif et d'un élément appelé conditionneur. La grandeur de sortie de la chaine est une tension électrique notée U (en Volt). Cette tension U varie avec la température T (en °C). La « précision » est donnée par l'indication $\pm(0{,}5\% + 8)$ avec un calibre de $0{,}01V$.On a réalisé l'étalonnage de ce transmetteur et on a obtenu les valeurs ci-dessous. On considère que les températures sont exactes.

T en °C	2,6	13,9	29,2	43,7	55,9	66,2	78,4	89,6
U en V	0,67	1,25	1,98	2,69	3,25	3,78	4,36	4,89

La forme du nuage de points invite à un ajustement affine dont les caractéristiques calculées par un logiciel sont :

Coefficient directeur	Ordonnée à l'origine	R^2
0,0484480	0,5617477	0,9998





La fonction $\widehat{U}$ définie par $\widehat{U}(T) = 0{,}048T + 0{,}562$ s'appelle la fonction de transfert.
Le coefficient directeur de l'ajustement s'interprète comme la sensibilité (0,048V par °C), l'ordonnée à l'origine correspond à l'offset (la valeur de sortie de la chaine pour une valeur d'entrée nulle) et le coefficient de détermination $R^2 = \frac{Var(\widehat{U})}{Var(U)}$ peut être interprété comme le pourcentage d'information (99,98%) apporté par la connaissance de T et mesure la qualité de l'ajustement.
Pour chaque valeur de la variable U on peut calculer la demi-étendue δ de l'intervalle représentant la mesure de l'incertitude-type par la formule $\delta = \frac{0{,}5}{100} \times U + 8 \times 0{,}01$. L'incertitude-type, au regard de la variance de la loi uniforme sur $[-\delta, \delta]$, est égale à $\frac{\delta}{\sqrt{3}}$.
On obtient donc le tableau suivant :

U en V	0,67	1,25	1,98	2,69	3,25	3,78	4,36	4,89
Incertitude-type en V	0,048	0,050	0,052	0,054	0,056	0,057	0,059	0,060

L'ajout des barres d'incertitudes sur le graphique permet de vérifier que la droite trouvée est un modèle pertinent sur toute l'étendue de la plage de valeurs.