

Diplôme : BTSA GEMEAU : Gestion et Maîtrise de l'EAU

Thème : Exemples d'utilisation des mathématiques dans des situations favorisant l'acquisition de capacités.

Commentaires, recommandations pédagogiques

L'enseignement des mathématiques doit contribuer, notamment en lien avec les disciplines professionnelles, à l'acquisition des capacités :

C4.1 – Vérifier la conformité technique et réglementaire des réseaux et des installations

C5.1 – Evaluer le fonctionnement d'une installation existante

C5.2 – Réguler le fonctionnement d'une installation

C8.1 – Réaliser un diagnostic de l'existant

C8.3 – Concevoir un projet technique adapté à la demande

L'enseignant veille à s'appuyer sur les acquis des élèves pour développer de nouveaux outils mathématiques principalement dans le but de répondre à des problématiques professionnelles. La mobilisation de ces outils dans le cadre de la résolution de problèmes concourt à l'obtention des capacités professionnelles susvisées. Cela donne du sens, puis montre l'importance de mobiliser de nouveaux outils mathématiques au service de l'acquisition des capacités professionnelles.

L'enseignement des mathématiques est intégratif et l'association avec ce qui est fait dans les disciplines professionnelles est un appui qui permet d'ancrer durablement les apprentissages. Les contextes doivent varier en fonction des situations techniques et provenir de documents issus de sources multiples, notamment les notices techniques.

Les progressions construites par l'enseignant de mathématiques en collaboration avec les enseignants de disciplines professionnelles doivent être en cohérence avec les attentes didactiques et pédagogiques de chaque discipline.

La résolution de problèmes demande de mobiliser des techniques calculatoires. Les calculs, pour une grande partie, peuvent être délégués à un outil de calcul numérique (calculatrice, tableur, logiciel de calcul, ...). Il ne s'agit pas ici de développer une virtuosité technique mais plutôt de se positionner comme observateur et de se questionner sur les processus mis en œuvre dans le domaine professionnel. La recherche de réponses amènera naturellement à élaborer des démarches, mener des calculs à l'aide d'un outil adapté, s'assurer de la cohérence de résultats et prendre des décisions.

L'institutionnalisation des notions, phase indispensable dans le processus d'apprentissage, a pour but d'explicitier les savoirs et les savoir-faire qui ont été mobilisés pendant la séance ou séquence, de donner des repères simples aux apprenants. Ce temps doit être court et synthétique. Les développements théoriques sont réduits à l'essentiel et toujours présentés dans un cadre simple. **Si des notions ont été déjà mobilisées sur certaines capacités, il convient de n'y faire référence dans les autres capacités que pour les remobiliser.**

Des mathématiques transversales à tous les blocs de compétences.

L'acquisition des capacités professionnelles demande d'aborder de nouvelles notions qui s'appuient de façon implicite sur des connaissances mathématiques vues dans les classes antérieures du collège et du lycée. Certaines difficultés d'apprentissage de ces nouveaux concepts proviennent d'un manque de maîtrise de ces prérequis. Il est indispensable d'y consacrer régulièrement du temps afin de réactiver et consolider ces savoirs sans entrer dans un schéma de révision. Le choix de réinvestir les notions transversales suivantes est décidé en fonction de la progression choisie et définie en cohérence avec les disciplines professionnelles :

- Proportion, pourcentage et proportionnalité.
- Sens des opérations, application de formules, représentation graphique de fonctions et exploitation graphique.
- Représentations de diagrammes statistiques pertinents, interprétation et utilisation d'indicateurs statistiques.
- Probabilités élémentaires, lien entre fréquences et probabilités, arbres de probabilités.

Afin que les apprenants soient aguerris aux pratiques calculatoires élémentaires favorisant l'acquisition des capacités, des automatismes mathématiques doivent être développés par un travail régulier, afin d'obtenir une aisance suffisante. La pratique de l'ensemble de ces items doit être très régulière, principalement sur des situations en lien avec les disciplines professionnelles.

Au-delà d'une pratique dans toutes les activités de la classe, il est aussi important d'entretenir ces automatismes par des rituels de début de séance, très régulièrement sur l'ensemble des deux années, sous forme de « questions flash » privilégiant l'activité mentale avec un recours à des connaissances, des procédures, des méthodes et des stratégies fondamentales dans la pratique professionnelle. Cela ne doit pas faire l'objet d'un chapitre d'enseignement spécifique car les notions qui les sous-tendent ont été travaillées dans les classes antérieures. Cette pratique, propre à chaque enseignant, doit s'adapter aux besoins propres des métiers visés.

Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs mais donnent une orientation de ce qui peut être fait.

Parmi eux, certains doivent être propices au calcul mental.

- Sens des opérations qui permet d'effectuer des calculs courants et de comprendre le sens des indicateurs utilisés.
- Calcul d'une moyenne, une moyenne pondérée.
- Passage d'une proportion ($1/2$, $3/4$, $1/5$, ...) à un pourcentage (50%, 75%, 20%, ...) et inversement.
- Calcul de pourcentages, calcul de prix TTC à partir d'un prix HT et inversement, avec des taux de TVA différents.
- Lien entre augmentation et diminution en pourcentage avec coefficient multiplicateur et les utiliser en situation.
- Comparaison en situation des proportions et des pourcentages.
- Application de formules et détermination de la valeur numérique d'une grandeur connaissant les autres.
- Calculs géométriques élémentaires s'appuyant sur les objets géométriques élémentaires : rectangle, carré, triangle, cube, pavé, cylindre.
- Conversions de mesures et capacités usuelles (cm³ en L, ha en km², ...)
- Reconnaissance graphique des fonctions de référence, en décrire les variations et les extremums.
- Choix d'une représentation graphique adaptée pour représenter des données, des proportions ou des pourcentages (graphique, diagramme circulaire, semi-circulaire, diagramme en bâtons ou en barres, barres empilées, ...).
- Inversement, interprétation des diagrammes et retrouver des données statistiques à partir de représentations.

Les outils numériques doivent être intégrés à l'enseignement des mathématiques. Ils apportent une plus-value permettant d'aborder de véritables problèmes issus des disciplines professionnelles. L'usage des outils numériques tels que le tableur, le langage Python, les logiciels de traitement de données, de calcul formel, de cartographie, ... doit être pensé dans l'optique de résoudre des problèmes qui n'auraient pas été accessibles sans. La maîtrise de ces outils numériques n'est pas un but en soi de l'enseignement des mathématiques. La calculatrice reste aussi un outil facilement mobilisable en classe. Cela n'est pas contradictoire avec une pratique du calcul mental régulière mais raisonnée, tant par la difficulté des questions posées que le contexte de sa pratique.

Les situations développées dans ce document ne couvrent pas la totalité du référentiel mais illustrent l'esprit dans lequel l'enseignement des mathématiques doit être mis en œuvre.

C4.1 – Vérifier la conformité technique et réglementaire des réseaux et des installations

Cette capacité doit être mobilisée pour développer la pratique d'automatismes en situation afin que la pratique des outils mathématiques soit la plus efficace au vu de la nécessité de manipuler mesures et caractéristiques dimensionnelles au regard des situations étudiées. L'enseignement de la capacité C4.1 aborde notamment les points suivants : longueur, surface, volume, conversion d'unités, étalonnage, incertitude des mesures, identification des ordres de grandeur, résolution d'équations du 1er degré, opérateurs et fonctions mathématiques. Il existe de très nombreux indicateurs qui sont autant de situations qui contribuent à la maîtrise des automatismes mathématiques pour les réinvestir en situation professionnelle contextualisée. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs, ils visent juste à illustrer ce que peuvent apporter les mathématiques à l'étude des caractéristiques dimensionnelles en situation.

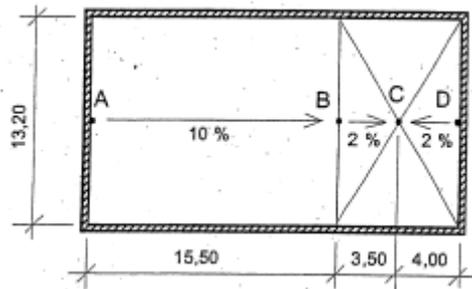
- **Longueur, surface, volume, conversion d'unités :**

Il importe de commencer par s'assurer de la bonne maîtrise en contexte dans la manipulation des grandeurs usuelles, des formules de volumes et des conversions d'unité de mesure. Par exemple, dans le cadre du calcul d'un débit hydraulique, le débit fourni par une pompe (ou une station de pompage) est le volume d'eau qu'elle refoule par unité de temps. Il s'exprime en litres par seconde (L/s) ou, plus pratiquement, en mètre cube par heure (m³/h). 1 L/s = 0,001 m³/s = 3,6 m³/h

Le débit est fonction de la vitesse V moyenne d'écoulement du liquide et de la section S de la canalisation :

$$Q \text{ (m}^3\text{/s)} = V \text{ (m/s)} \times S \text{ (m}^2\text{)}$$

Les situations peuvent être complexifiées en y mêlant des calculs de pente comme savoir calculer, pour une profondeur en A de 1,5 m, la profondeur de la piscine aux points B, C et D.



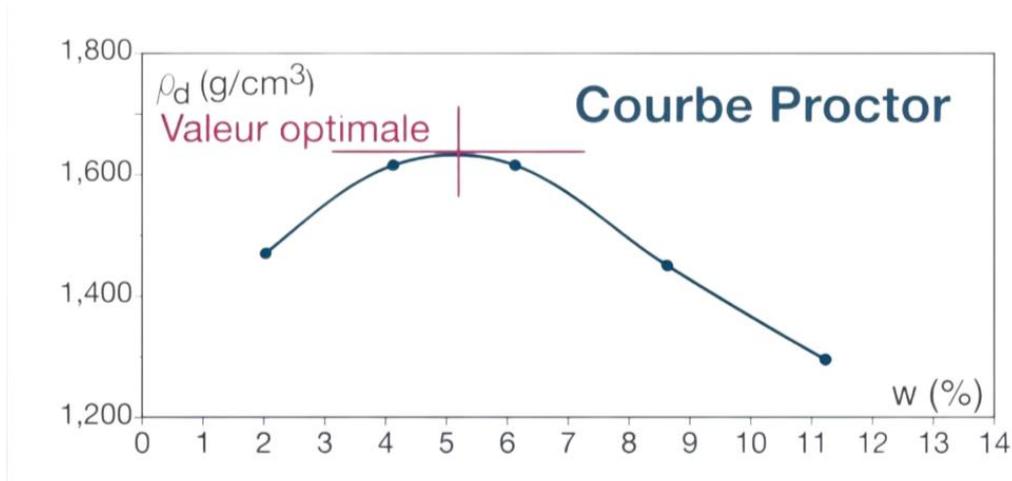
- **Caractéristiques dimensionnelles particulières :**

Etat du sol :

Le document d'accompagnement du référentiel précise pour le module M4 l'importance de la caractérisation du comportement d'un sol avec les limites d'Atterberg, le compactage (essai PROCTOR), le tassement, la portance... Les paramètres d'état du sol abordés sont très nombreux et il est essentiel de se rapprocher des disciplines techniques pour cibler les plus pertinentes à travailler au regard des situations étudiées afin d'en maîtriser au mieux les usages. La compréhension du sens des opérations faites, en particulier le calcul d'une proportion, permet de comprendre le sens de ces indicateurs et ainsi mieux les retenir.

- Poids volumique sec d'un sol : $\gamma_d = \frac{w_s}{v_t}$ où w_s est le poids des grains solides de l'échantillon et v_t le volume total de l'échantillon.
- Poids volumique des grains solides : $\gamma_s = \frac{w_s}{v_s}$ où w_s est le poids des grains solides de l'échantillon et v_s le volume des grains solides de l'échantillon.
- ...
- Porosité : $\eta = \frac{v_v}{v_t}$ où v_v est le volume des vides de l'échantillon et v_t le volume total de l'échantillon.
- Indice des vides : $e = \frac{v_v}{v_s}$ où v_v est le volume des vides de l'échantillon et v_s le volume des grains solides de l'échantillon.
- ...

L'essai établi par l'ingénieur américain PROCTOR en 1933 consiste à répéter plusieurs fois un processus de compactage d'un sol en variant la teneur en eau de ce sol dans des conditions normalisées. Le résultat est une courbe de forme de cloche exprimant la densité sèche ρ_d en fonction de la teneur en eau w , appelée courbe de compactage ou courbe de Proctor :



Analyse de la courbe PROCTOR

La courbe Proctor présente généralement une forme en cloche :

Branche ascendante : L'eau facilite le compactage en réduisant les forces capillaires.

Point optimal : Équilibre idéal entre l'eau et l'air dans les pores.

Branche descendante : L'excès d'eau empêche une compaction efficace.

Densité sèche maximale (ρ_{dmax}) : Point le plus haut de la courbe.

Teneur en eau optimale (w_{opt}) : Teneur en eau correspondant à ρ_{dmax} .

Autant d'indices qui peuvent être l'objet d'exercices du type :

Une étude de compactage au laboratoire a été réalisée afin de définir les conditions de compactage a donné le tableau de résultats d'essai de compactage suivant (ici on mesure le poids volumique γ_d et non la densité ρ_d , mais cela reste proportionnel) :

w [%]	10,6	12,0	13,5	14,8	15,6	16,2	17,0
γ_d [kN/m ³]	16,0	17,3	18,2	18,1	17,6	17,0	16,4

- Tracer la courbe relative aux essais de compactage
- Déterminer les caractéristiques de l'optimum

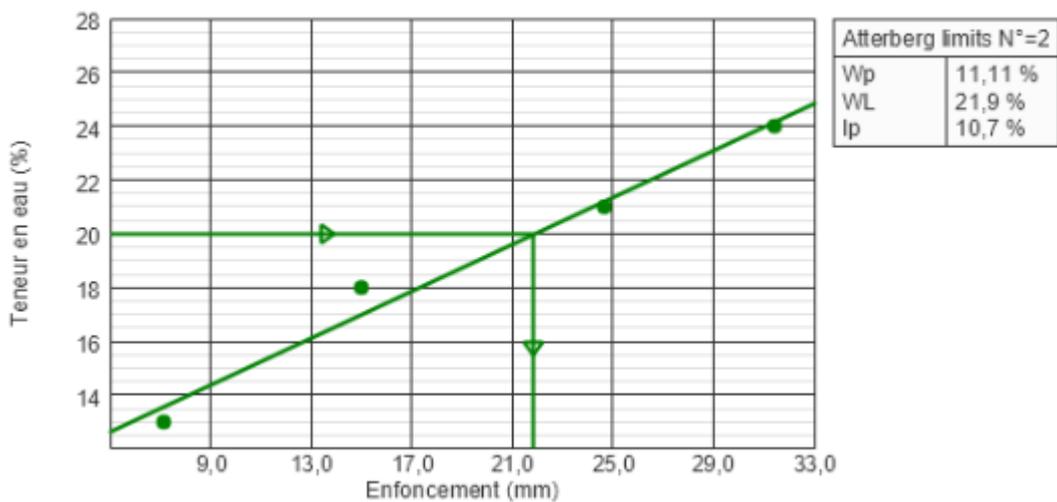
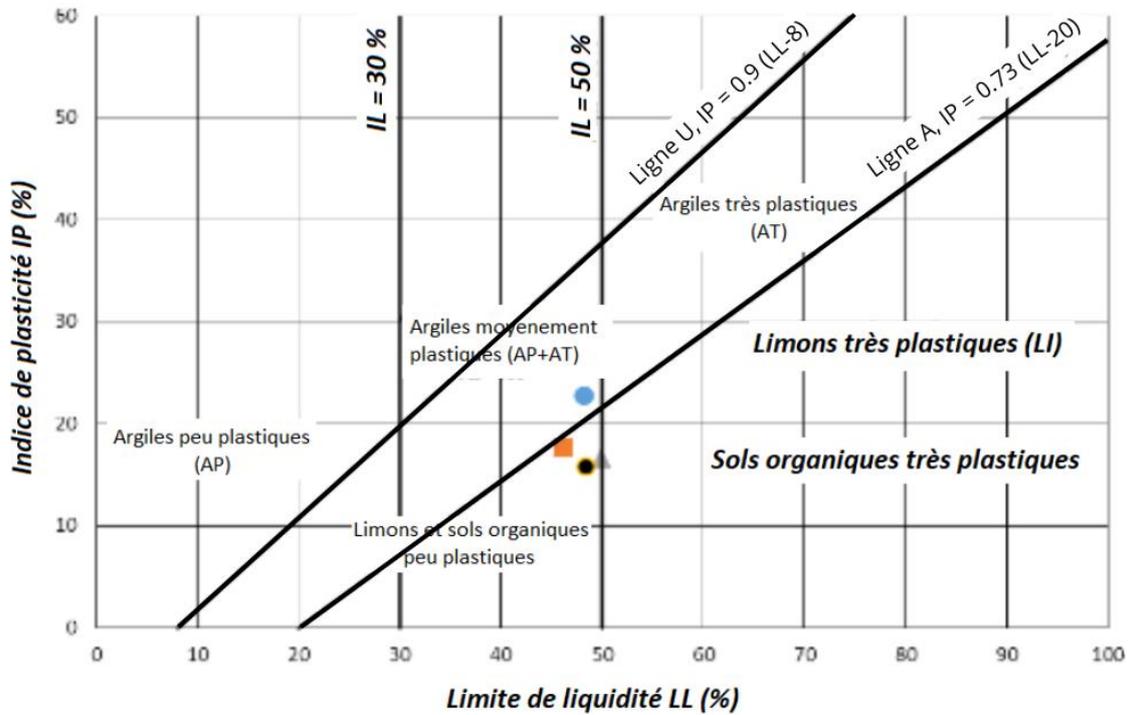
L'échantillon pèse à son état sec 15 kN/m^3 et la densité des grains solide est de $2,26$ et $\gamma_w = 10 \text{ kN/m}^3$

- Calculer l'indice des vides

L'indice des vides du sol en question devient après compactage $0,25$ et le volume nécessaire compacté est de 180150 m^3 en utilisant des camions pouvant transporter 10 m^3 chacun.

- Déterminer le nombre de camions nécessaires.

La maîtrise des fonctions affines est essentielle pour comprendre et interpréter de nombreux diagrammes comme le diagramme de CASAGRANDE. Même si l'utilisation de logiciels professionnels peut intervenir rapidement, la formation doit permettre d'interpréter de tels graphiques.

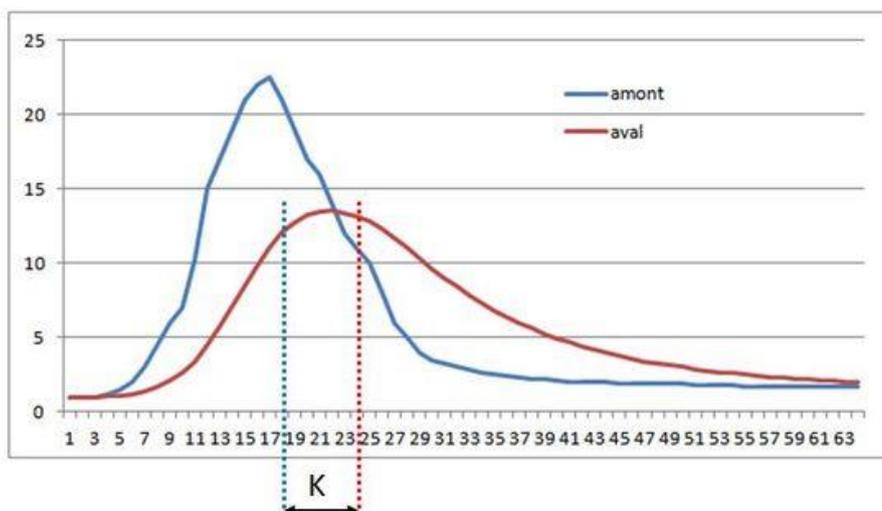


Sources : <https://www.univ-bechar.dz/site/wp-content/uploads/2023/02/Polycopies-MDS.pdf>
[Les sols – éditions ellipses](#)
[Limites D'Atterberg : Compréhension Et Applications Pratiques En Géotechnique](#)

Lag time:

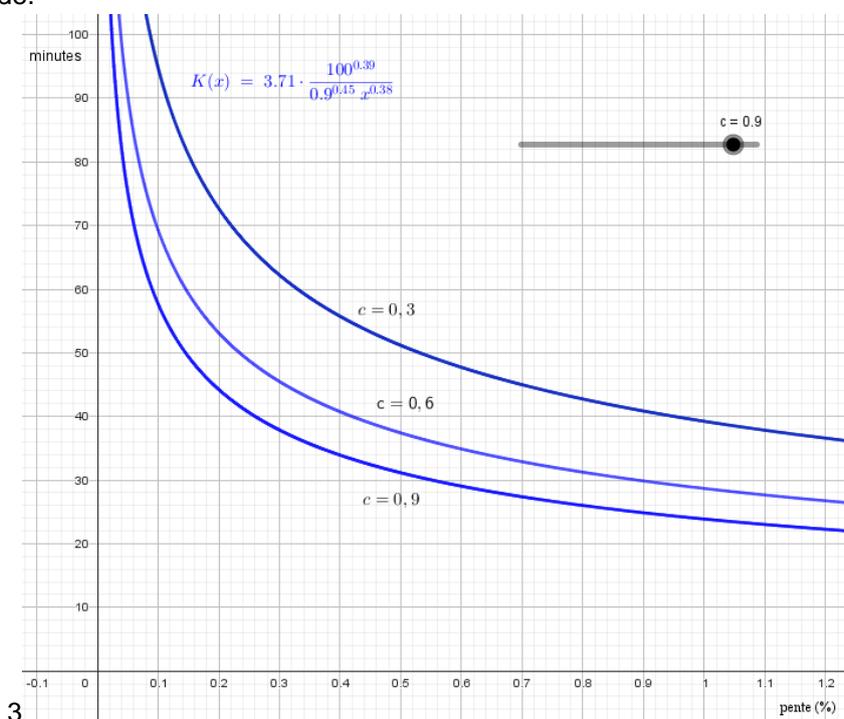
Une mobilisation des fonctions usuelles et en particulier les fonctions puissances est très importante au regard de nombreuses formules en hydrologie les utilisant. Le lag time, note K, peut être un exemple illustratif. Il désigne le décalage temporel entre l'hydrogramme d'entrée et l'hydrogramme de sortie pour n'importe quel élément constitutif d'un système hydrologique (tronçon de réseau, bassin de retenue, etc.)

Le graphique suivant montre le débit en m³ / s en fonction du temps pendant un épisode de pluie. La courbe bleue donne le résultat pour la pluie tombant en amont et la rouge le débit résultant dans la partie aval.



Une formule utilisable pour comprendre la démarche est $K = 3,71A^{0,394} C^{-0,452} l^{-0,383}$ où A est la surface du bassin versant (hectares) ; l la pente du plus long parcours (en %, c'est à dire comprise entre 0 et 100) et C le coefficient d'imperméabilisation (en rapport, c'est à dire compris entre 0 et 1) ;
 Suivant le contexte local, la formule utilisée pourra différer, mais cela ne modifiera pas la démarche de compréhension des effets au regard de la modification des paramètres.

Prenons l'exemple d'une surface de 100 ha. En représentant la valeur de K en fonction de la pente et en prenant un curseur c qui représente l'imperméabilité, on retrouve que l'augmentation de l'imperméabilisation (c qui se rapproche de 1) et l'augmentation de la pente influe sur une valeur de K qui diminue, donc qui traduit une réponse cohérente du débit de pluie plus rapide.



[http://wikhydro.developpement-durable.gouv.fr/index.php/Lag_time_\(HU\)](http://wikhydro.developpement-durable.gouv.fr/index.php/Lag_time_(HU))

Autre source documentaire : [Memento technique 2017 Astee gestion des eaux.pdf](#)

Exemples de situations d'automatismes :

Calcul de pourcentages / Teneur en eau

Un échantillon de sol humide avec sa tare pèse 462g. Après séchage à l'étuve, l'ensemble (sol sec + tare) pèse 364g. La tare seule pèse 39g. Déterminer la teneur en eau (w) de l'échantillon, exprimée en pourcentage, avant séchage.

Application de formules / Poids volumique sec

Le poids volumique apparent humide d'un sol est de 17,6 KN/m³. Si sa teneur en eau (w) est de 10 %, déterminer le poids volumique sec.

Application de formules / Indice des vides

Un sol présente un poids volumique sec de 16 KN/m³. Le poids volumique des grains solides est de 26 KN/m³. En considérant que le poids volumique de l'eau est de 10 KN/m³, déterminer l'indice des vides de ce sol.

Interprétation de diagrammes / Granulométrie / Coefficient d'uniformité

Suite à une analyse granulométrique, les diamètres de grains pour lesquels 10 % et 60 % de l'échantillon passent au tamis sont respectivement D10 = 0,15 mm et D60 = 1,23 mm. Calculer la valeur du coefficient d'uniformité (Cu) pour ce sol.

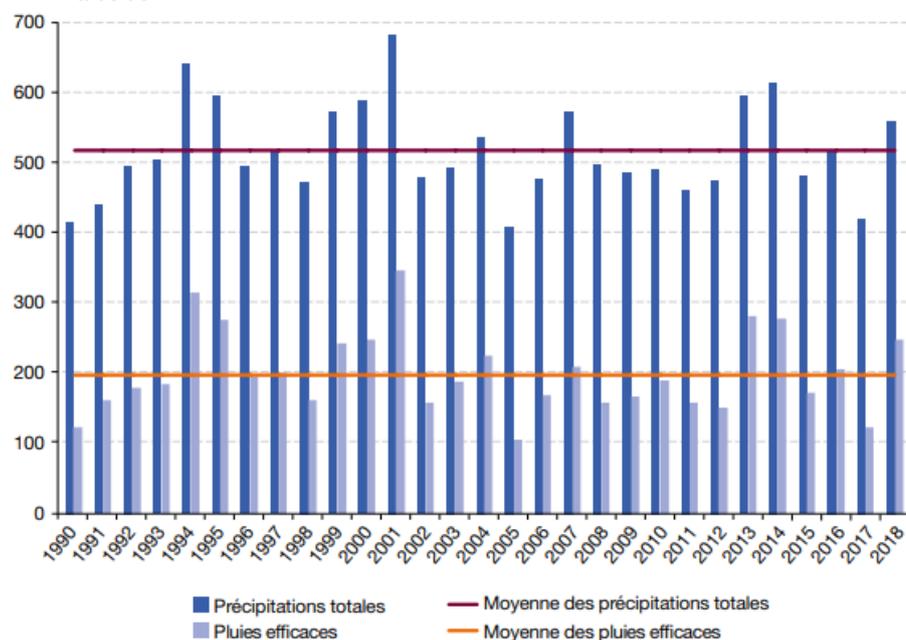
Lien augmentation/diminution en pourcentage / Application de formules / Volume

Pour un remblai routier, un volume de 180 150 m³ de sol compacté est requis avec un poids volumique sec de 18,2 KN/m³. Si le sol est extrait d'un gisement où son poids volumique sec moyen est de 16,0 KN/m³, déterminer le volume de sol (avant compactage) devant être extrait du gisement pour obtenir le volume compacté requis ? (On suppose que la masse de solides est conservée)

Statistiques

ÉVOLUTION ANNUELLE DU VOLUME DES PRÉCIPITATIONS TOTALES ET DES PLUIES EFFICACES, PAR ANNÉE HYDROLOGIQUE (SEPTEMBRE À AOÛT)

En milliards de m³



Note : l'année hydrologique 2018 couvre les mois de septembre 2017 à août 2018 inclus.

Source : Météo-France, 2019. Traitements : SDES, 2020

Source : Ministère de la transition écologique, Eau et milieux aquatiques Les chiffres clés Édition 2020

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

- En moyenne, 40% des précipitations totales sont des pluies efficaces.
- Chaque année, les pluies efficaces représentent toujours le même pourcentage des précipitations totales.
- Les précipitations totales ont diminué sur la période 1990 – 2018
- La médiane des précipitations totales est proche de la moyenne des précipitations totales sur la période 1990 – 2018

Durée de retour de pluie

La période de retour de pluie est la durée moyenne au cours de laquelle, statistiquement, un événement d'une même intensité se reproduit. Météo France les fournit de manière journalière ou infra horaire.

<https://services.meteofrance.com/climatologie/durees-de-retour/durees-de-retour-infra-horaire>

DUREES DE RETOUR DE FORTES PRECIPITATIONS

Episode : 30 mn – Méthode GEV Locale-Régionale

Statistiques sur la période 1994-2023

FONTAINEBLEAU_SAPC (77)

Indicatif : 77186002, alt : 84 m., lat : 48°24'21"N, lon : 2°40'42"E

L'échantillon des fortes pluies ayant servi à ajuster les paramètres de la loi Locale-Régionale GEV :

- contient **329** valeurs **maximales annuelles**

- provient également des **11** stations : 77333003 (NEMOURS), 91184001 (COURDIMANCHE), 77306001 (MELUN), 91069001 (BOIGNEVILLE), 77054001 (LA_BROSSE-MX), 77207001 (GIRONVILLE), 77211001 (NANGIS), 91103001 (BRETIIGNY_SAPC), 91027002 (ORLY), 94068001 (ST-MAUR), 89380001 (SAVIGNY_CLAIRIS) situées sur un rayon de 47.5 km.

Pour ces stations, est appliqué un facteur multiplicatif dépendant de la climatologie des précipitations.

Durée de retour	Hauteur estimée	Intervalle de confiance à 70 %	
5 ans	23.4 mm	21.4 mm	25.7 mm
10 ans	28.4 mm	26.0 mm	31.4 mm
20 ans	33.5 mm	30.6 mm	37.4 mm
30 ans	36.6 mm	33.4 mm	41.2 mm
50 ans	40.6 mm	37.0 mm	46.2 mm
75 ans	43.9 mm	40.0 mm	50.4 mm
100 ans	46.4 mm	42.1 mm	53.5 mm

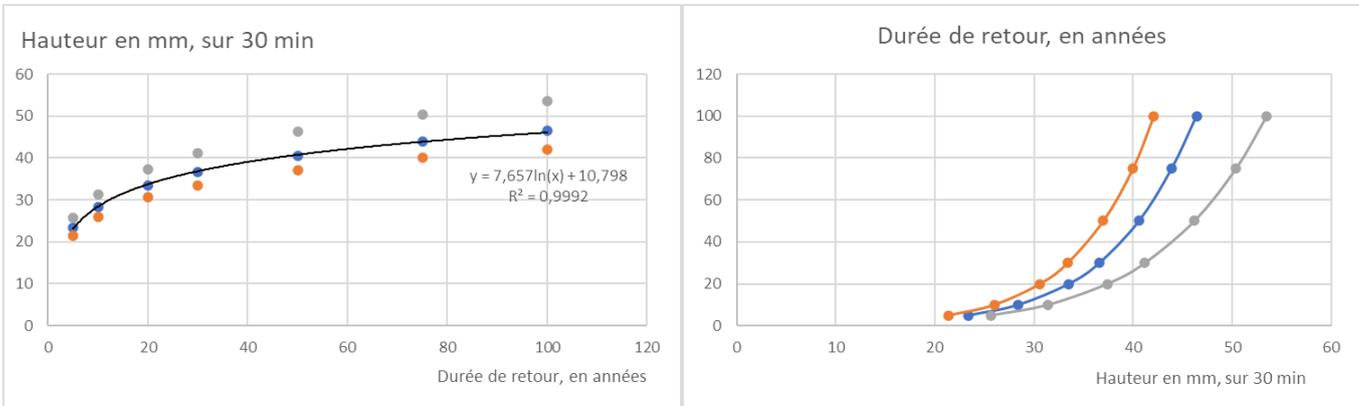
Cela signifie que l'on peut s'attendre sur Fontainebleau, par exemple, tous les 5 ans à un épisode pluvieux de 23,4 mm en 30 min à Fontainebleau. Dans 70% des épisodes relevés, la hauteur sera entre 21,4 et 25,7 mm. Cela ne signifie pas que l'événement est certain d'arriver tous les cinq ans, mais plutôt que la probabilité qu'il se produise chaque année est de 1 chance sur 5, ce qui donne une probabilité de 0,2 et qu'il ne se produise pas de 0,8. La probabilité qu'au moins un tel épisode se produise sur 5 ans est donc $1 - 0,8^5 \approx 0,67$, sur 10 ans de 0,89 et sur 20 ans de 0,99. On est donc quasiment sûr qu'un tel épisode va se produire sur une période de 20 ans.

Mais dans la gestion des risques, on n'attend pas d'être totalement sûr qu'un épisode se produise, d'autant plus que les investissements en infrastructure sont conçus pour plusieurs années. Si on considère un événement centennal qui génère beaucoup de dégâts, la probabilité qu'il intervienne au moins une fois sur 30 ans est $1 - 0,99^{30} \approx 0,26$. Il y a donc une chance sur quatre qu'au moins un épisode centennal arrive sur une période de 30 ans. Il est alors possible de décliner de nombreuses situations contextualisées utilisant la loi binomiale, par exemple d'observer k événements sur une durée donnée.

Les données sont souvent payantes et pas toujours disponibles. L'installation d'un relevé de pluviométrie permet de récupérer un échantillon sur plusieurs années et ainsi réaliser un ajustement. Avec peu de données, on peut envisager un ajustement linéaire. Si on arrive à récupérer davantage de données sur des périodes longues on peut utiliser, comme modèle simplifié, une régression logarithmique de la hauteur estimée en fonction de la durée de retour, ou exponentielle de la durée de retour en fonction de la hauteur estimée.

En reprenant les valeurs des hauteurs de pluie, moyennes et avec l'intervalle de confiance à 70%, en fonction des durées de retour de pluie, les graphiques peuvent être réalisés sur tableur.

Durée de retour (années)	Hauteur (mm)	Hauteur (mm)	Hauteur (mm)
5	23,4	21,4	25,7
10	28,4	26	31,4
20	33,5	30,6	37,4
30	36,6	33,4	41,2
50	40,6	37	46,2
75	43,9	40	50,4
100	46,4	42,1	53,5



Les modélisations météorologiques sont complexes, dépassent le niveau BTSA ; c'est la compréhension de ce qu'est une modélisation qui importe ici. Les graphiques en échelles semi-logarithmiques invitent à évoquer cette échelle.

DUREES DE RETOUR DE FORTES PRECIPITATIONS

Episode : 30 mn – Méthode GEV Locale-Régionale

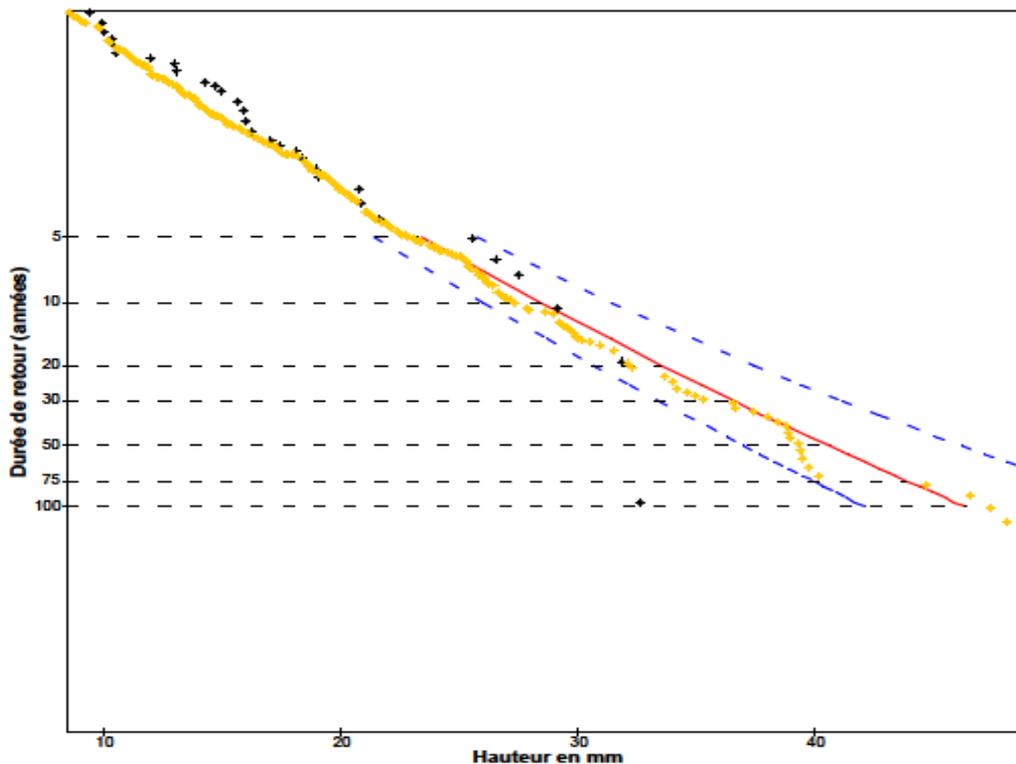
Statistiques sur la période 1994-2023

FONTAINEBLEAU_SAPC (77)

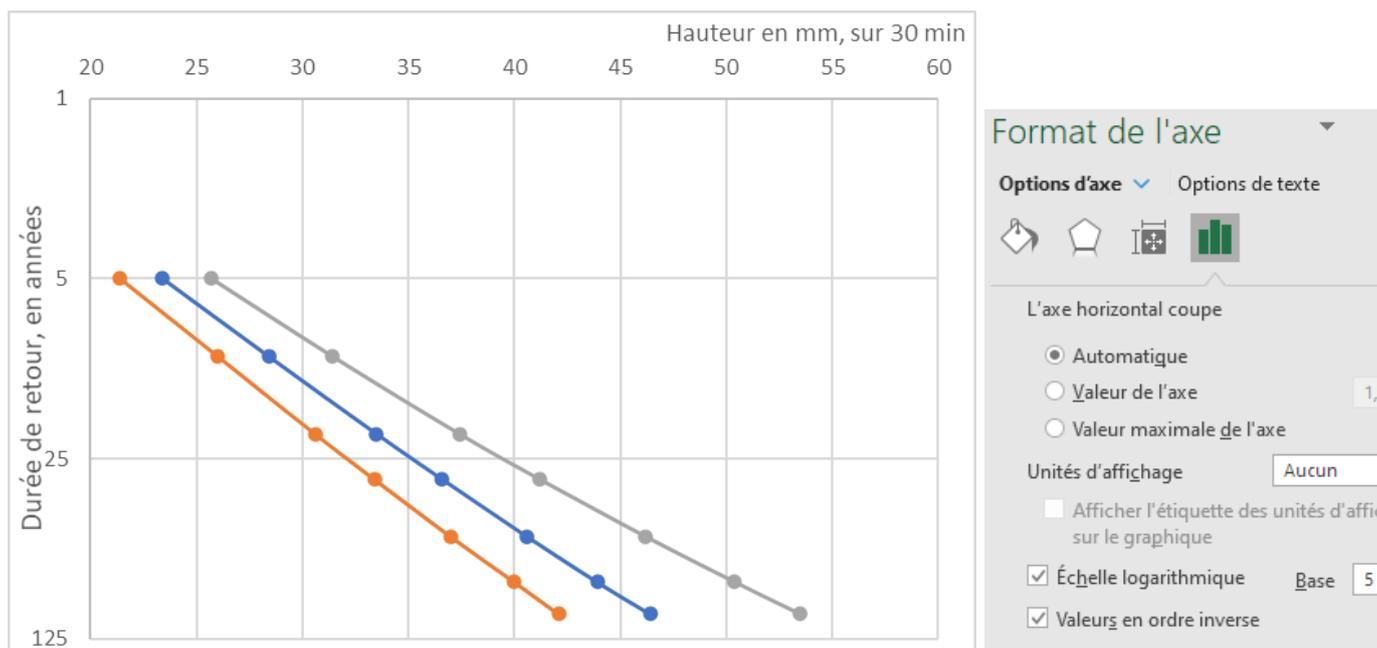
Indicatif : 77186002, alt : 84 m., lat : 48°24'21"N, lon : 2°40'

GRAPHIQUE D'AJUSTEMENT

La droite donne la hauteur de précipitations estimée pour une durée de retour exprimée en années.
Les observations sont pointillées. L'intervalle de confiance à 70 % est représenté en pointillés.
Les croix noires représentent les observations à la station et les oranges, les valeurs maximales de l'échantillon affectées du coefficient multiplicatif de leur station d'appartenance.



Grâce à la fonctionnalité d'utilisation de l'échelle logarithmique et d'inversion des valeurs, on retrouve le même résultat graphique sur tableau :



Impact sur la gestion de la quantité d'eau

Les coefficients de Montana permettent de déterminer pour un intervalle de temps compris entre 2 pas de temps (ou durées de cumul) non consécutifs la hauteur de pluie ou l'intensité maximale selon différentes durées de retour.

COEFFICIENTS DE MONTANA

Formule des hauteurs

Statistiques sur la période 1994 – 2023

FONTAINEBLEAU_SAPC (77) Indicatif : 77186002, alt : 84 m., lat : 48°24'21"N, lon : 2°40'42"E

La formule de Montana permet, de manière théorique, de relier une quantité de pluie $h(t)$ recueillie au cours d'un épisode pluvieux avec sa durée t :

$$h(t) = a \times t^{(1-b)}$$

Les quantités de pluie $h(t)$ s'expriment en millimètres et les durées t en minutes.
Les coefficients de Montana (a, b) sont calculés par un ajustement statistique entre les durées et les quantités de pluie ayant une durée de retour donnée.

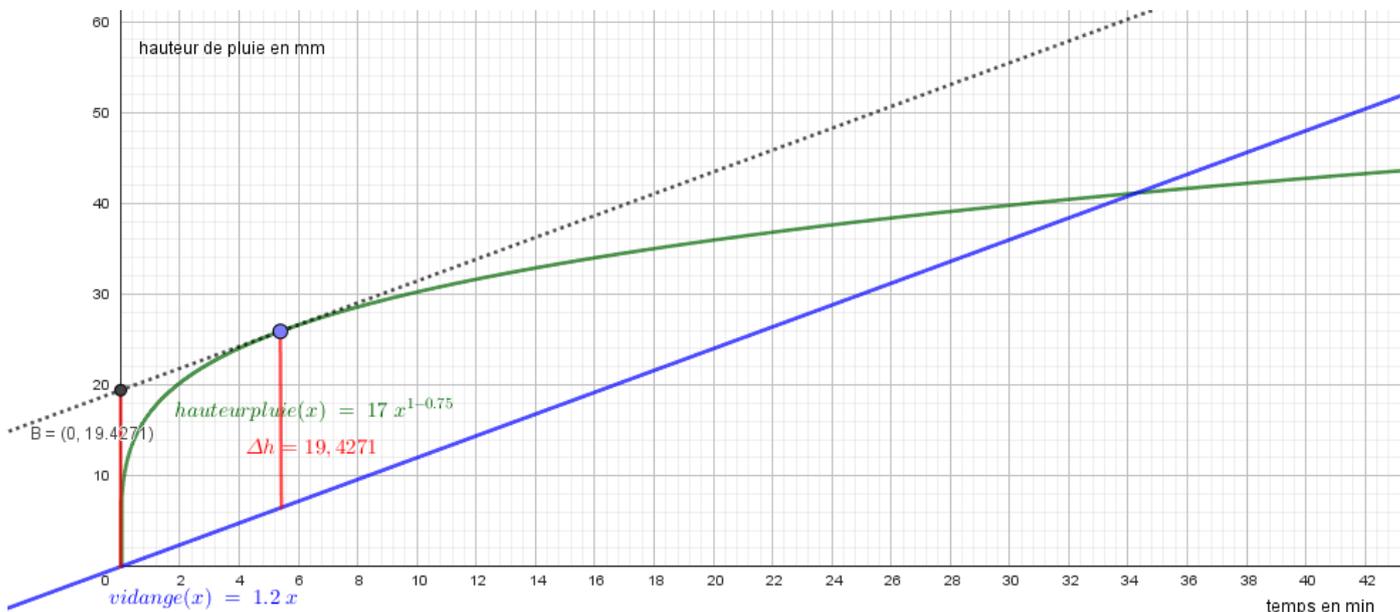
Cet ajustement est réalisé à partir des pas de temps (durées) disponibles entre 6 minutes et 1 heure.
Pour ces pas de temps, la taille de l'échantillon est au minimum de 28 années.

Coefficients de Montana pour des pluies de durée de 6 minutes à 1 heure

Durée de retour	a	b
5 ans	4.503	0.538
10 ans	5.221	0.527
20 ans	5.871	0.514
30 ans	6.142	0.502
50 ans	6.519	0.49
100 ans	6.895	0.469

La connaissance des précipitations permet de déterminer la quantité d'eau à collecter.

Considérons sur Fontainebleau, une zone résidentielle de surface active (qui tient compte des pentes et coefficients d'infiltration) de 1,5 ha qui possède un débit de vidange spécifique de 1,2 mm/min. Dans le cadre d'une construction, on prend, par exemple, comme cible une durée de retour à 30 ans pour déterminer la hauteur de pluie sur 24 heures. On considère dans ce cas que les coefficients de Montana sont $a = 17$ et $b = 0,75$.



Ainsi, la tangente à la courbe de hauteur de pluie (déterminée par les coefficients de Montana) parallèle à la fonction de vidange naturelle permet de déterminer la hauteur de pluie à stocker, ce qui représente un volume égal $\Delta h \times$ surface active. Pour des raisons de sécurité, on envisage un coefficient de sécurité de 1,2 et on multiplie par 10 pour satisfaire les conditions d'homogénéité de formule mêlant ha et mm. D'où le volume à stocker est $V = 1,2 \times 10 \times \Delta h \times$ surface active, soit environ 350 m^3 (environ sept piscines de particuliers de 8m par 4 m par 1,5m de profondeur).

Cette situation s'appuie sur l'exemple disponible en suivant le lien : <http://www.symasol.fr/wp-content/uploads/2016/08/Fiche-WEB-9-Me%C3%8C%C2%81thode-de-calcul.pdf> et qui tient compte d'un ensemble très complet des paramètres à calculer.

Autres sources documentaires :

[Période de retour d'insuffisance \(HU\) - Wikhydro](#)

<https://services.meteofrance.com/climatologie>

Les équations différentielles.

Si assez rapidement les élèves seront entraînés à résoudre des équations différentielles, il importe de comprendre ce qui justifie que de nombreux phénomènes sont modélisés par des fonctions non linéaires. Pour comprendre les mises en équations différentielles et les modèles exponentiels, on va prendre les situations permettant de prendre en compte progressivement l'évolution des concentrations :

Exemple : Un sac de 25 kg de nitrates tombe dans une mare, sans nitrates, que l'on peut assimiler à un pavé de 20 m sur 10 m et 2 m de profondeur. La concentration en nitrates autorisée est de 50 mg/L.

Situation 1 : cas discret

Des calculs faisant intervenir des automatismes (volumes et proportionnalité) permettent d'établir que la concentration est de $25000000 \text{ mg} / 400000 \text{ L} = 62,5 \text{ mg/L}$, valeur bien supérieure à 50 mg/L.

Pour commencer à dépolluer, on imagine de vider un seau d'eau de 10 L dans un filtre et récupérer un seau d'eau pure et la remettre dans le bassin. A l'issue de la première opération, la nouvelle concentration est de $(399\,990 \times 62,5 \text{ mg/L}) / 400\,000 = 62,4984375 \text{ mg/L}$

En réitérant le procédé, on obtient à la deuxième étape $(399\,990/400\,000) * 62,4984375 \text{ mg/L} = 62,49687504 \text{ mg/L}$
 On est dans le cas d'une suite géométrique de raison $399\,990 / 400\,000 = 0,999975$ et de premier terme 62,5. Le seuil est atteint au bout de 8926 réitérations. Cela peut être traité par tableur, mais la programmation en Python est bien plus efficace.

Il peut être intéressant de comparer ce procédé à celui de mettre d'abord un seau de 10 L d'eau pure et de refaire le procédé. La raison est alors de $400\,000/400\,010$ et on obtient le même nombre de procédé.

```
def seuil():
    u=62.5
    n=0
    while u>=50:
        n=n+1
        u=400000/400010*u
    return n
```

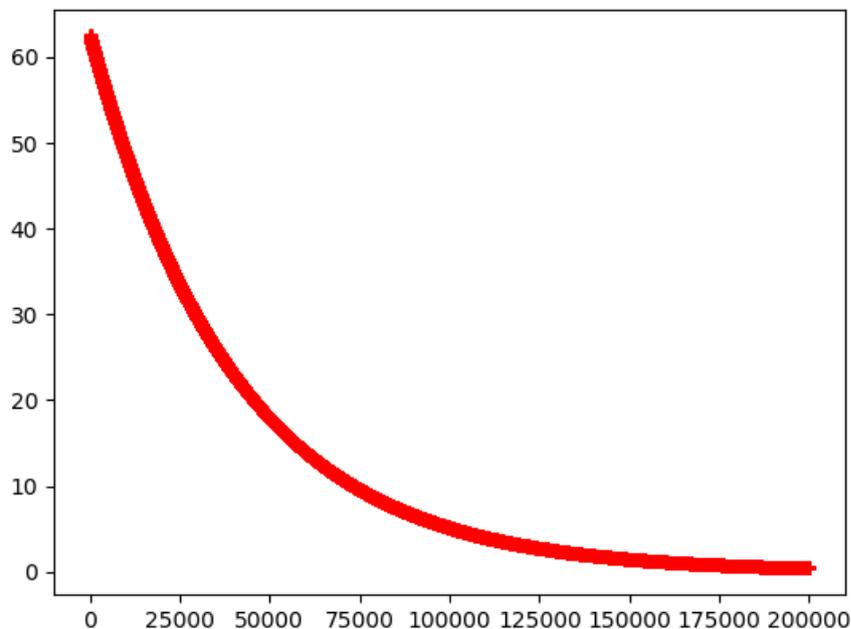
Outre le réinvestissement de la méthode, cela traduit le fait que dans la réalité d'un processus continu, on est sur les mêmes résultats. Il est possible de se questionner sur la proportionnalité ou non entre la taille du seau et la diminution du nombre de procédés en changeant juste les paramètres dans le programme.

On peut alors représenter l'évolution en décroissance exponentielle de la concentration en nitrates :

```
from matplotlib.pyplot import*

u=62.5
n=0
abs=[0]
ord=[62.5]
for i in range(1,200000):
    abs.append(i)
    u=400000/400010*u
    ord.append(u)

plot(abs,ord,'r+')
show()
```



Situation 2 : cas continu

On dispose maintenant d'une pompe, en circuit fermé permettant le passage de l'eau par un filtre, dont le débit est de 100L/min.

On note $C(t)$ la concentration en mg/L à l'instant t et on considère l'unité de temps Δt en minute.

La concentration à l'instant $C(t + \Delta t)$ s'obtient en reprenant l'idée vue avec le seau.

Durant l'unité de temps Δt , on peut considérer que l'on prélève un seau d'eau polluée de volume $100 \times \Delta t$, qu'on le filtre puis qu'on le déverse dans la mare.

$$C(t + \Delta t) = C(t) \times \left(\frac{400000 - 100\Delta t}{400000} \right) = C(t) - \frac{100\Delta t}{400000} C(t)$$
$$\frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} = -100 \times \frac{C(t)}{400000} = -0,00025C(t)$$

En considérant des intervalles Δt très petits,

$$C'(t) = -\frac{1}{4000} C(t) = -0,00025C(t)$$

Cet exemple peut se transposer dans les contextes locaux (stations d'épuration, bassins de décantation, ...) pour lesquels il faut connaître les données volumétriques des bassins et le débit des pompes en œuvre.

Incertitudes de mesures

L'enseignement des mathématiques contribue à confronter les apprenants au procédé d'**étalonnage** et vérification d'un appareil de mesure et de se familiariser avec les notions de **sensibilité**, **justesse**, **répétabilité** et **incertitude** en relation avec les **indicateurs statistiques**.

Le vocabulaire de la métrologie est spécifique, il est nécessaire d'y familiariser les apprenants. On peut se limiter aux termes suivants :

- Le *mesurage* : processus permettant de déterminer expérimentalement une ou plusieurs valeurs d'une grandeur physique.
- Le *mesurande* : grandeur physique soumise à l'opération de mesurage (longueur, masse, intensité, résistance, pression...)
- La *valeur vraie* : valeur du mesurande que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait. Un mesurage n'étant jamais parfait, cette valeur est toujours inconnue. On parle également de « valeur théorique ».

Pour les capteurs et les instruments de mesure, l'étalonnage permet notamment d'estimer l'erreur et de la compenser en appliquant une correction. La vérification permet de confirmer que l'erreur de mesure reste plus petite qu'une erreur appelée erreur maximale tolérée. L'erreur maximale tolérée est définie par l'utilisateur comme étant la plus grande erreur qu'il est prêt à accepter.

Pour estimer l'erreur, la procédure d'étalonnage d'un instrument consiste à appliquer un mesurande connu en entrée du système de mesure et de comparer la sortie à la valeur attendue. Lorsque l'on applique plusieurs fois le même mesurande en entrée du système dans des conditions de répétabilité, bien souvent la réponse n'est pas identique. Il existe en effet des différences qui sont dues à deux composantes : l'erreur systématique et l'erreur aléatoire.

Si on note M la **variable aléatoire**, qui à chaque mesurage d'un même mesurande dans les mêmes conditions associe la valeur du mesurage, l'**espérance** $E(M)$ permet naturellement de donner une valeur théorique au mesurage. La modélisation par la variable aléatoire M des résultats des mesurages conduit à étudier deux distributions de probabilités, la loi normale et la loi uniforme. On peut consulter à cet effet le site suivant <https://culturemath.ens.fr/thematiques/lycee/de-l-aleatoire-dans-les-mesures> qui présente des notions mathématiques mises en jeu au-delà des besoins de cette capacité.

On considère alors :

- L'erreur aléatoire ou erreur de répétabilité. Elle provient essentiellement des variations temporelles et spatiales non prévisibles des grandeurs d'influence. Il n'est pas possible de compenser l'erreur aléatoire d'un résultat de mesure. L'erreur aléatoire se définit comme la différence entre une mesure et la moyenne d'un nombre infini de mesurages du même mesurande. $E_a = M - E(M)$. E_a est une variable aléatoire d'espérance nulle et est distribuée le plus souvent suivant une **loi normale**. $E(M)$ n'est pas accessible mais peut être estimée par la moyenne empirique ou par un intervalle de confiance. A cet effet, il est important de développer une représentation de la **fluctuation d'échantillonnage** d'une moyenne par des simulations et de faire émerger l'**intervalle de confiance** d'une moyenne. Les théorèmes sous-jacents sont le **théorème central limite** et la **loi des grands nombres**.

- L'erreur systématique ou erreur de justesse. C'est une erreur constante qui affecte chacune des mesures. Elle ne peut pas être réduite en augmentant le nombre de mesures, mais par application d'une correction. L'erreur systématique est définie comme la différence de la moyenne d'un nombre infini de mesurages du même mesurande et la *valeur vraie* $E_s = E(M) - V_{vraie}$. Un des objectifs de l'étalonnage est de déterminer si l'erreur systématique est significative au regard de la précision requise du mesurage et de l'éliminer par une correction. On peut alors être amené à déterminer le caractère significatif de l'erreur systématique en vérifiant si la *valeur vraie* du mesurande étalon est dans l'intervalle de confiance de la moyenne, ou en mettant en œuvre un **test de Student** dans le cas d'une distribution normale de M ou si l'échantillon des mesures est suffisamment grand. Dans le cas d'une correction de l'erreur systématique, il importe de faire prendre conscience que la correction n'est pas parfaite car \hat{m} l'estimateur obtenue sur un échantillon de taille N de $E(M)$ est entaché d'incertitude.

L'erreur de mesure est donc $E = M - V_{vraie} = (M - E(M)) + (E(M) - V_{vraie})$.

Toute mesure étant incertaine, il s'agit d'évaluer l'incertitude par des méthodes statistiques (ce que l'on nomme évaluation de type A). Il importe de faire le lien entre incertitude et variabilité de la réponse de l'appareil pour un mesurande donné. On suppose dans la suite que l'erreur systématique est nulle et seule l'erreur aléatoire contribue à l'erreur de mesure. L'incertitude de type A est évaluée à partir de N mesurages du même mesurande. Si M suit une loi normale, on peut se convaincre par des simulations que l'intervalle $[\hat{m} - k.s, \hat{m} + k.s]$ (où \hat{m} est la moyenne empirique et s^2 la variance corrigée obtenue à partir de N mesurages du même mesurande, N suffisamment grand) contient environ 95% des résultats des mesurages lorsque $k = 2$ et 99% lorsque $k = 3$.

On appelle alors incertitude type pour un mesurage l'écart type de M qui est estimée avec s sur N mesurages, le coefficient k est appelé facteur d'élargissement et $k.s$ est appelée incertitude élargie. Pour un niveau de confiance donné, la valeur d'un mesurage sera alors exprimée sous la forme :

$$(valeur lue) \text{ unité} \pm (incertitude élargie) \text{ unité (facteur d'élargissement)}$$

Parfois, le résultat du mesurage est une moyenne de n valeurs. L'incertitude type pour ce mesurage est alors $\frac{s}{\sqrt{n}}$

Il existe d'autres sources d'erreur que les grandeurs d'influence. Par exemple, les appareils de mesure renvoient des valeurs dans un ensemble discret. On peut alors définir un pas de mesure qui est le plus petit écart mesurable que l'on nomme résolution. Si la résolution de l'appareil est δ , la valeur vraie du mesurande qui produit le résultat m peut se situer avec une égale probabilité à n'importe quel endroit de l'intervalle $[m - \frac{\delta}{2}, m + \frac{\delta}{2}]$. Le calcul de l'écart type d'une loi uniforme permet de définir l'incertitude liée à la résolution. Cet écart type peut très bien être estimé par des simulations plutôt que calculé avec une intégrale. Les méthodes sont à adapter au regard des profils des apprenants. Ces méthodes de quantification des incertitudes issues directement du processus de mesurage sont dites de type B. Pour aller plus loin, il est possible d'évoquer les incertitudes composées, par exemple lorsqu'une grandeur est calculée à partir de la somme de deux grandeurs mesurées. La formule de la variance d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes permet de calculer l'incertitude composée.

L'étalonnage d'un capteur consiste aussi à établir une relation entre les grandeurs d'entrée et de sortie c'est-à-dire à modéliser le signal de sortie du capteur en fonction de la variable mesurée. En entrant différentes valeurs connues et en les associant à leur valeur en sortie, on peut alors construire un nuage de points et modéliser par une fonction les valeurs de sortie en fonction de la variable d'entrée. Dans le cadre de l'enseignement du bloc 4, seul le modèle linéaire est à utiliser. A cet effet, plusieurs méthodes de détermination de **droite de régression** sont à exploiter (au jugé, droite de Mayer, moindres carrés). En ce qui concerne la droite des moindres carrés, comme on suppose que les valeurs en entrée ne sont pas entachées d'erreurs, il convient d'utiliser la régression de y en x . La droite d'étalonnage obtenue par régression linéaire est comparée aux valeurs attendues et permet d'identifier les erreurs de justesse, les dérives de sensibilité mais aussi de réaliser des prévisions. Dans ce cadre, le coefficient directeur, l'ordonnée à l'origine et le coefficient de détermination sont à interpréter.

Au-delà de situations d'entraînement analogues à celles présentes dans le document Eduscol, on peut aussi l'appliquer à une situation de gestion des réseaux hydrauliques en lien avec la formule de Strickler : $Q = K.D^{\frac{8}{3}}I^{\frac{1}{2}}$ avec K le coefficient de Strickler et I la pente du collecteur.

En considérant que :

- K et I sont des constantes : $\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{8}{3} \frac{\Delta D}{D}$,
- le débit est proportionnel à la hauteur d'eau h qui elle-même évolue en fonction du logarithme népérien de la durée de retour T , $\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta T}{T} \frac{1}{\ln(T)}$

Ainsi, une incertitude de 20% sur la pluie de projet se traduirait-elle par une incertitude de $20/(8/3) = 7,5\%$ sur le diamètre du tuyau. Si le coût des collecteurs devait représenter 50% du coût total du réseau, l'incertitude sur ce coût résultant de celle sur la pluie de projet ne serait donc que de l'ordre de $50\% \times 7,5\% \approx 4\%$, c'est-à-dire bien inférieure à celle avec laquelle le coût du projet peut être estimé. Ainsi passer d'une protection décennale à une protection centennale, soit T multiplié par 10, alors même que les ouvrages sont prévus pour une cinquantaine d'années (ce qui augmente le niveau de sécurité), conduirait à multiplier approximativement le débit de projet par $\ln(10) \approx 2,3$. Le débit étant en fonction carré du diamètre, le diamètre moyen des collecteurs serait multiplié par $\sqrt{2,3} \approx 1,5$. Il reste alors à appliquer les incertitudes pour déterminer le coût du projet.

D'autres ressources :

- une ressource sur la mesure et les incertitudes en physique-chimie dans l'enseignement général sur Eduscol : [mesures & incertitudes-PC-eduscol](#).
- Un parcours M@gistere (accessible avec le CAS Educagri), dans M@gistere DGESCO sur les mesures et incertitudes : [Parcours : Mesures et incertitudes](#)

Exemples d'automatismes

L'ensemble des automatismes doit être pratiqué quelles que soient les thématiques travaillées. Pour cette capacité, on peut continuer la pratique d'automatismes tels que dans les autres capacités, certains points pouvant sembler faire partie d'une autre capacité mais ils sont vus ici comme des acquis à consolider.

- Une capsule vide pèse 22,560 g. Après filtration et séchage, elle pèse 23,015 g. L'échantillon d'eau était de 250 mL. Déterminer la concentration en MES (Matières En Suspension) en mg/L.

*La concentration en MeS (CMeS en g/L) de l'échantillon est donnée par $C_{MeS} = \frac{m_1}{V_{testé}}$
 m_1 : masse MeS après chauffage à 105°C (g) et $V_{testé}$: Volume de l'échantillon (L)*

- Une boue humide pèse 250 g, puis 40 g après séchage. Déterminer la siccité.

La siccité est le pourcentage massique de matière sèche, soit ici $40/250 = 0,16 = 16\%$.

- Un échantillon de boue (1 L) décante et forme un volume de 250 mL de boue. Calculer l'indice de Mohlman.

Plusieurs définitions de cet indice existent et on choisit celle pour laquelle l'indice de Mohlman représente le volume moyen occupé par 1 gramme de boue après 30 minutes de décantation. Il s'exprime en mL/g, même si on le donne le plus souvent sans unité. Ici il est donc de $250/1000 = 0,25$

- Trois mesures de pH sont : 6,7 ; 6,9 ; 7,1. Déterminer le pH moyen.
- Un oxymètre affiche 9,5 mg/L d'oxygène dissous. Exprimer cette valeur en g/m^3 .
- Un capteur donne une tension de 0,325 V. Donner la valeur en mV.
- Une solution a une turbidité de 12 NTU pour 100 mg de MES. Estimer la MES pour 18 NTU.
- Une bille flottante parcourt 1,5 m en 3,2 s. Calculer la vitesse d'écoulement de l'eau.
- On dispose de 1 L d'une solution à 10 mg/L. Calculer le volume d'eau à ajouter pour la diluer à 2 mg/L.
- Déterminer le flux (ou charge) (F) d'une concentration des matières en suspension de 300 mg/L et un débit de $100 m^3 /j$.

*$F = C \times Q$ (maintenir des unités identiques : $kg/j = kg/m^3 \times m^3 /j$).
 $C = 300mg/L = 300 g/m^3 = 0,3 kg/m^3$. $F = C \times Q = 0,3 \times 100 = 30 kg/j$.*

- Calculer la charge hydraulique de capacité nominale $1000 m^3 /j$ recevant un débit de $200 m^3 /j$.

La charge hydraulique est $200 / 1000 = 20 \%$.

L'utilisation de l'intelligence artificielle est une aide pour générer des automatismes à partir de notices techniques abordant certaines notions en étant vigilant aux erreurs que cet outil peut commettre.

Programmation des équipements électrotechniques

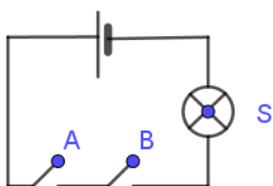
La programmation des équipements électrotechniques amène à s'intéresser aux connecteurs logiques (ou, et, non, non et, non ou, ou exclusif) et les instructions conditionnelles (si alors, tant que). La lecture de schéma électrique et de Graphe Fonctionnel de Commande des Étapes et Transitions (GRAFCET) est nécessaire à la compréhension du fonctionnement de l'installation.

L'**algèbre de Boole** est le cadre théorique pour modéliser les portes logiques des circuits électriques. Les étudiants doivent être familiarisés avec les notations suivantes des valeurs de vérité :

$\{0,1\}, \{Faux, Vrai\}, \{F, V\}, \{False, True\}, \{F, T\}$. L'opérateur logique unaire de négation noté *non*, \neg , $\bar{\quad}$ et les deux opérateurs logiques binaires, la *conjonction* et la *disjonction*, servent de base à l'écriture des fonctions logiques.

Pour comprendre le sens des tables de vérité, il peut être utile de se ramener à la représentation d'un schéma électrique avec la convention qu'en entrée le 0 correspond à un interrupteur (A, B) ouvert et 1 à un interrupteur fermé, en sortie le 0 correspond à une lampe (S) éteinte et 1 à une lampe allumée :

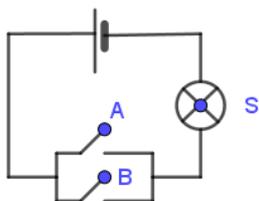
Entrée		Sortie
A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Cette configuration est la configuration « **ET** ». Pour que la lampe S s'allume (1), il faut que les interrupteurs A « **ET** » B soient fermés (1). Si l'un d'entre eux reste ouvert (0), la lampe reste éteinte (0).

Dans ce cas on symbolise en écrivant $S = A \cdot B$ en faisant l'analogie avec la multiplication au regard des résultats obtenus.

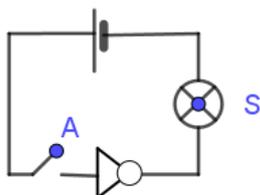
Entrée		Sortie
A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Cette configuration est la configuration « **OU** ». Pour que la lampe S s'allume (1), il suffit que l'un des interrupteurs A « **OU** » B soit fermé (1)

Dans ce cas on symbolise en écrivant $S = A + B$ en faisant l'analogie avec l'addition au regard des résultats obtenus avec la convention $1 + 1 = 1$.

Entrée	Sortie
A	S
0	1



Le « **NON** » se traduit par le fait d'inverser les sorties. En termes de composant électronique cela se nomme un inverseur et il est symbolisé par $\triangleright \circ$. Ce qui signifie que lorsque l'interrupteur en A est ouvert la lampe s'allume.

Ces trois tables de vérité permettent de construire, par association, l'ensemble des « portes logiques » représentant sous forme numérique l'ensemble des circuits électroniques. La construction d'une table de vérité à partir d'une fonction logique à 2 ou 3 variables est un attendu, tandis que l'écriture d'une fonction logique à partir d'une table de vérité à 2 ou même 3 variables est souhaitable en retour.

Les propriétés d'associativité, de commutativité, de distributivité, ainsi que l'idempotence ($A \cdot A = A, A + A = A$) et les lois de **Morgan** ($\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$ et $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$) que l'on peut vérifier en construisant les tables de vérité permettent la simplification des écritures des fonctions logiques.

Exemple 1 : Transformation d'expressions en algèbre de Boole

On considère la fonction logique $f(p, q) = (p \text{ ou } q) \text{ et } (p \text{ ou non } q)$

On montre par le calcul que $f(p, q) = (p + q) \cdot (p + \bar{q}) = p^2 + p \cdot (q + \bar{q}) + q \cdot \bar{q}$ et en utilisant le fait que $p^2 = p$ et $q + \bar{q} = 1$ et $q \cdot \bar{q} = 0$ on obtient $f(p, q) = p$

Les apprenants doivent être familiarisés aux différentes notations des opérateurs *disjonction* et *conjonction* à savoir $(+, \cdot)$, (\cup, \cap) , *(ou, et)*, *(or, and)* voire *(max, min)*. Il peut être intéressant de définir l'opérateur binaire de *disjonction exclusive* que l'on peut noter \oplus , \vee , *XOR* qui est fortement utilisé dans les portes logiques des circuits électriques. Cela est symbolisé par différentes notations.

Il peut être judicieux d'introduire les tables de **Karnaugh** pour simplifier une fonction logique complexe à partir de sa table. Aucune virtuosité technique n'est attendue. Il s'agit dans des cas simples ne présentant pas de difficultés de réduire l'écriture d'une fonction logique à 2 ou 3 variables.

Exemple 2: Réalisation d'un circuit logique associé à une table de vérité

On considère la fonction logique f dont la table de vérité est

a	b	c	$f(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Pour écrire f sous forme d'une somme de produits, on repère les 1 dans la table de vérité. Le premier correspond à $a = 0, b = 0, c = 1$, donc $f(a,b,c) = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + \dots$. Le suivant correspond à $a = 0, b = 1, c = 0$, donc $f(a,b,c) = \bar{a} \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} + \dots$ et ainsi de suite pour arriver à $f(a,b,c) = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \bar{c}$.

Pour simplifier, on peut utiliser la factorisation :

$$f(a,b,c) = (\bar{a} + a) \cdot \bar{b} \cdot c + (\bar{a} + a) \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \text{ et comme } \bar{a} + a = 1, f(a,b,c) = \bar{b} \cdot c + b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$$

Les tables de **Karnaugh** de f ne sont qu'un outil de simplification pour mettre en œuvre cette factorisation.

A partir de l'expression de f sous forme de somme on a :

	$b \cdot c$	$b \cdot \bar{c}$	$\bar{b} \cdot c$	$\bar{b} \cdot \bar{c}$
a	0	1	1	1
\bar{a}	0	1	1	0

On sélectionne les « paquets » de 1 verticaux (par 2^n) pour faire apparaître les $\bar{a} + a$. Ce qui donne $\bar{b} \cdot c + b \cdot \bar{c}$

Il ne reste alors que $a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$

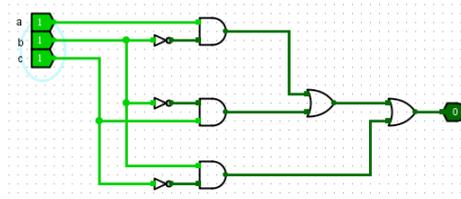
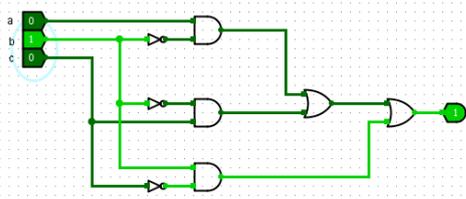
- Vérifier le résultat à l'aide d'une table de vérité qui peut être produite par un script Python.

```
def f(a,b,c):
    return int((a and not b and not c) or (not b and c) or (b and not c))
```

*# a, b et c prennent les valeurs 0 ou 1, True ou False
donne la table de vérité de f*

```
for a in range(2):
    for b in range(2):
        for c in range(2):
            print(a,b,c,f(a,b,c))
```

- Réaliser le circuit correspondant à la fonction logique f .



Les diagrammes sont réalisés avec le logiciel Logisim accessible sur le site <https://ww2.ac-poitiers.fr/techno-si/spip.php?article348>

La construction de tables de vérité pour les fonctions logiques amène à aller vers la programmation en **Python**. Les apprenants entrant en BTSA ont été sensibilisés au langage Python dans leur formation précédente. Il s'agit ici de réinvestir et approfondir leur connaissance sur le langage. Les besoins essentiels sont l'utilisation de variables numériques et booléennes, la structuration d'un script à l'aide d'une ou plusieurs fonctions Python, la maîtrise des instructions conditionnelles et des boucles bornées.

Les ressources en lien avec le BUT GEII sont très nombreuses et donnent de très nombreux exemples.

Exemple 3 : Transformation d'expressions en algèbre de Boole

On considère la fonction logique $f(p, q) = (p \text{ ou } q) \text{ et } (p \text{ ou non } q)$

- Vérifier que $f(p, q)$ a la même table de vérité que p .

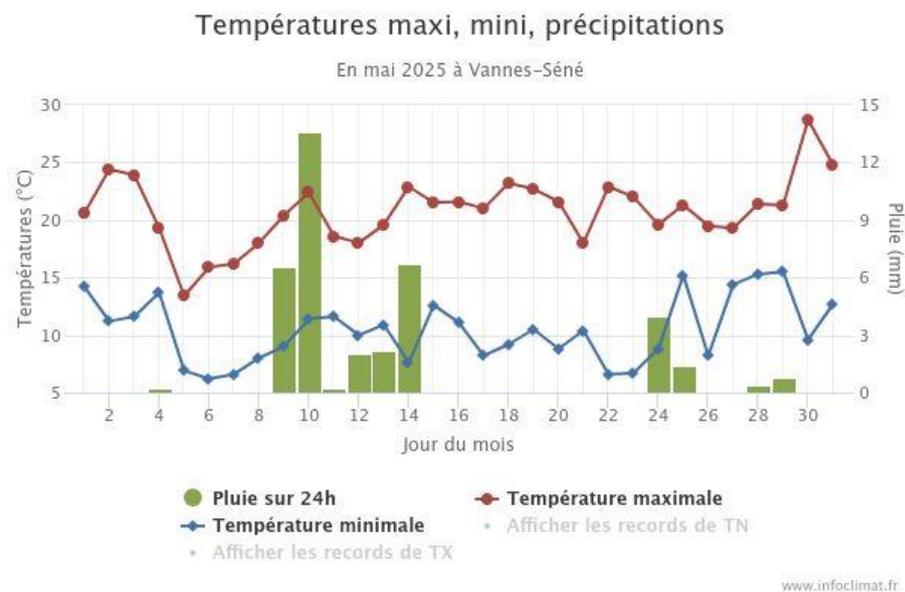
- Montrer par le calcul que $f(p, q) = p$.

$$f(p, q) = (p + q) \cdot (p + \bar{q}) = p^2 + p \cdot (q + \bar{q}) + q \cdot \bar{q} = p \text{ en utilisant le fait que } p^2 = p, q + \bar{q} = 1, q \cdot \bar{q} = 0$$

Exemples d'automatismes.

L'ensemble des automatismes doit être pratiqué quelles que soient les thématiques travaillées. Pour cette capacité, on peut continuer la pratique d'automatismes tels que dans les autres capacités, certains points pouvant sembler relever d'une autre capacité mais ils sont vus ici comme des acquis à consolider.

- Un réservoir permet d'arroser le gazon en 4 h, de faire de la maçonnerie en 5 h et d'arroser les arbres en 6 h. S'il est utilisé en même temps pour chacune des trois activités, combien de temps mettra-t-il à se vider ?
- Le coefficient de ruissellement pour une surface imperméable (**Cri**) est de $0,8 \pm 0,1$, le taux d'imperméabilisation d'un bassin versant (**ImpBV**) est de $0,6 \pm 0,05$ et **Crbv** = **Cri** x **ImpBV**. Déterminer un intervalle auquel appartient le coefficient de ruissellement pour le bassin versant (**Crbv**).
- Pour une section circulaire à pleine section de périmètre P, la surface mouillée (S) est $\pi D^2/4$. Déterminer le rayon hydraulique $R_h = \frac{S}{P}$.
- Le débit Q pour un écoulement à pleine section est donné par la formule de Manning-Strickler : $Q = K \times S \times R_h^{2/3} \times I^{1/2}$ où S est la surface mouillée, R_h le rayon hydraulique, I la pente et K le coefficient de Manning-Strickler.
 - Exprimer Q en fonction de K, D et I .
 - Un collecteur d'eaux pluviales de section circulaire DN 1000 (D = 1 m) doit transporter un débit de 1,2 m³/s avec une pente I. En considérant un coefficient de Manning-Strickler K = 70 , déterminer la pente requise.
- A Vannes, au mois de mai, l'évapotranspiration est environ de 3 mm/j et on a le relevé météorologique :



Justifier que le mois de mai a permis de stocker de l'eau dans les sols à Vannes.

- **Topographie**

La formation apporte les savoirs indispensables à la compréhension des mesures, ainsi que les outils mathématiques nécessaires à l'exploitation de ces données. Les apprenants doivent maîtriser la prise de mesures (topométrie) et faire le lien entre les mesures de terrain et leur exploitation réalisée essentiellement à l'aide d'outils informatiques (tableurs pour le traitement des données brutes, logiciels et applications professionnels de type SIG) afin de pouvoir restituer ces données sous forme de cartes et de plans.

Des activités pluridisciplinaires peuvent compléter cet enseignement. Les savoir-faire doivent être consolidés par l'expérience lors des périodes de mise en situations professionnelles.

Concernant les méthodes de levée topographique, en fonction des besoins et si cela revêt un intérêt dans les disciplines techniques, les apprenants sont amenés à mobiliser les outils mathématiques nécessaires aux calculs topométriques (transfert de coordonnées d'un système polaire vers un système cartésien et vice versa, loi du sinus, formule d'Al-Kashi, formule de Heron, trigonométrie dans le triangle rectangle,...). La formation comprend :

- La présentation des méthodes topométriques : altimétrie et planimétrie ;
- Le déroulement des opérations de topographie ;
- L'utilisation des appareils de mesures usuels ;
- L'acquisition de données terrains via des capteurs embarqués sol ou aérien (drone, balise RTK, Lidar...).

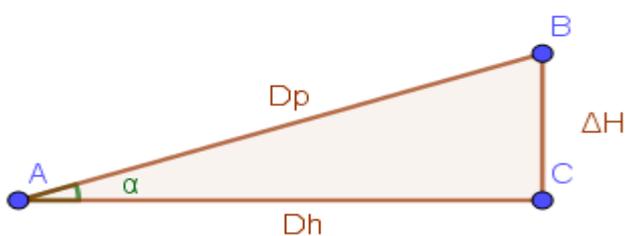
Les choix des méthodes et des instruments de topométrie sont réalisés en fonction de l'objectif de la mesure et de la précision souhaitée (matériels et incertitudes des mesures). La formation comprend l'interprétation des écarts-types, la vérification et le réglage des instruments de topométrie.

Il est important d'automatiser le placement des points sur le cercle trigonométrique, les mesures d'angles seront données en degré. L'apprenant doit donc savoir placer des points donnés en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées polaires et passer de l'une des représentations à l'autre, maîtriser les coordonnées d'un vecteur. Etant donné un point P de coordonnées polaires $(r; \theta)$ de déterminer ses coordonnées cartésiennes $(x; y)$ avec la formule $x = r \times \cos(\theta)$ et $y = r \times \sin(\theta)$ et inversement si P a pour coordonnées cartésiennes $(x; y)$ de déterminer ses coordonnées polaires $(r; \theta)$ avec la formule $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{r}$.

L'usage du grade en topographie amène l'enseignant de mathématiques à la présenter comme unité proportionnelle au degré pour laquelle 90 degrés ($^{\circ}$) correspondent à 100 grades (gon). La persistance de ces unités sur certains appareils de mesure nécessite de former les apprenants à passer de l'une à l'autre aisément. Pour autant, les raisonnements trigonométriques restent indépendants de l'unité.

L'enseignement de la topographie est l'occasion de travailler sur les relations trigonométriques dans le triangle rectangle, qui permettent, à partir de la connaissance de deux longueurs et un angle, de déterminer le triangle. Dans une approche épistémologique de la trigonométrie, il importe de faire comprendre sa capacité à calculer le non mesurable.

Dans un premier temps on traite de situations simplifiées.

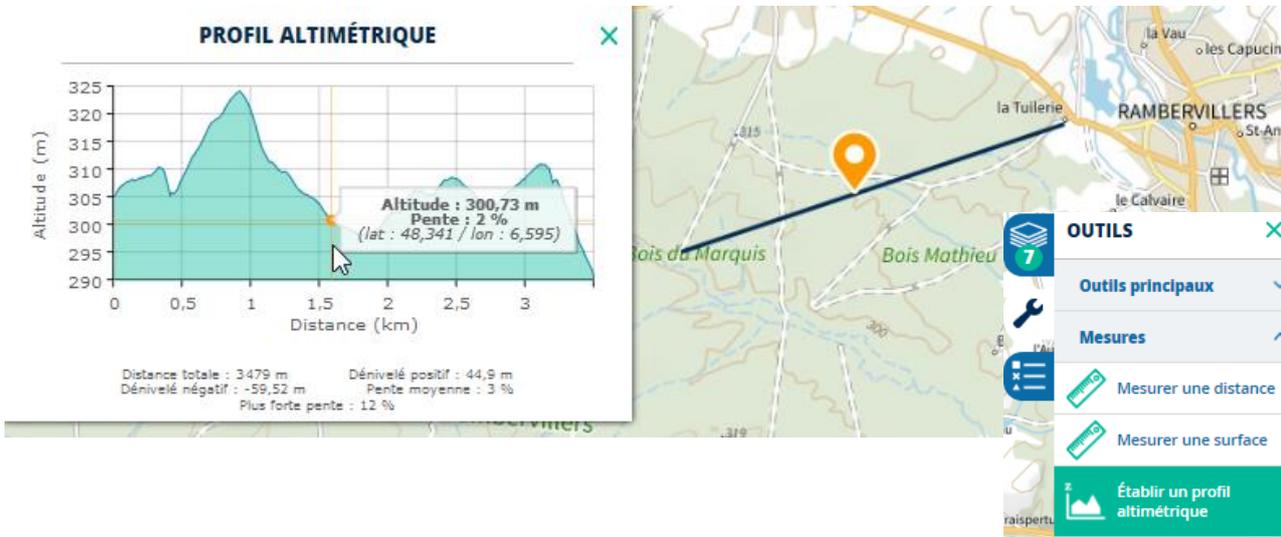


- $Dh = Dp \cos(\alpha)$ et $\Delta H = Dp \sin(\alpha)$
- La pente définie par $\tan(\alpha)$

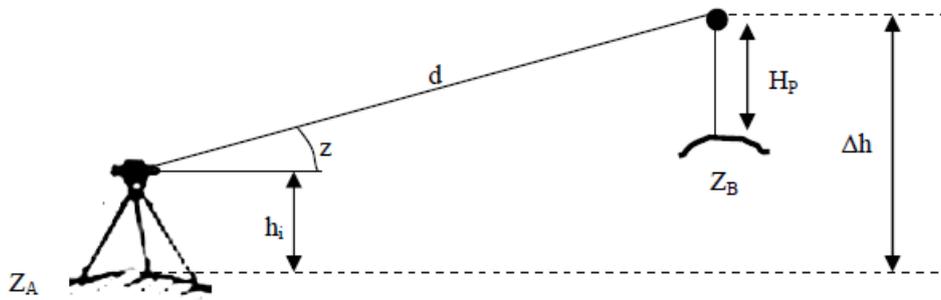
D'autres situations permettent dans un premier temps de se réapproprier une pratique, en particulier avec des calculs de dénivelé et de pente.

Si le terrain n'est pas parfaitement horizontal, il faut considérer que l'on mesure (à l'aide d'un ruban par exemple) la distance Dp suivant la valeur α déterminée par un appareil de mesure comme un télémètre laser. On en déduit alors :

GEOPORTAIL donne tous les outils pour appréhender le relief en visualisant les pentes à l'aide de l'outil « profil altimétrique » afin, par exemple, de déterminer la possibilité de réaliser un chantier.



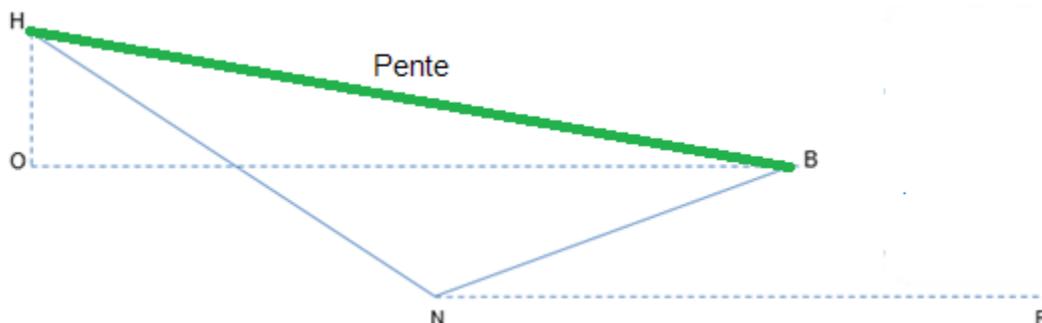
Les formules trigonométriques peuvent alors s'appliquer pour déterminer l'altitude du point B à partir de celle du point A par la relation : $Z_B = Z_A + h_i + d \sin(z) - H_p$



(https://library.wmo.int/doc_num.php?explnum_id=4721 page 20)

Étude d'un exemple :

Dans le cadre d'utilisation de nombreuses formules en hydraulique, la détermination d'une pente est fondamentale. Dans le cadre de l'utilisation d'un niveau de chantier, on choisit l'emplacement pour cet appareil (point N sur le schéma ci-dessous), un point de référence (point R) pour la mesure des angles et vous placez deux mires, l'une à l'endroit représenté par le point H en haut de la pente au niveau de l'entrée du magasin et l'autre, à l'endroit représenté par le point B, en bas de la pente, à la sortie du parking.



Le point R est à l'angle 0° . Avec le niveau, vous visez les points N, B et H et obtenez le carnet de relevé suivant en utilisant les fils stadimétriques vus en cours de topographie.

Point	Visée basse	Visée moyenne	Visée haute	Angle en degré
N	0,45	0,50	0,55	0
H	1,260	1,303	1,346	165
B	0,856	0,883	0,910	50

On applique la règle suivante étudiée au préalable en topographie :

distance (d) entre le niveau de chantier et le point de visée est : (visée haute – visée basse) × 100.

Ainsi, à la lecture du tableau, on en déduit les distances NB et NH et l'angle \widehat{BNH} :

$$NB = (0,910 - 0,856) \times 100 = 5,4 \text{ m}$$

$$NH = (1,346 - 1,260) \times 100 = 8,6 \text{ m}$$

$$\widehat{BNH} = \widehat{RNH} - \widehat{RNB} = 165 - 50 = 115^\circ.$$

En utilisant la formule d'Al-Kashi dans le triangle BNH, $BH \approx 11,93 \text{ m}$.

Pour calculer le dénivelé entre les points B et H, qui correspond à la distance OH sur le schéma, on soustrait directement les visées moyennes des deux points.

$$OH = 1,303 - 0,883 = 0,42 \text{ m}.$$

On prend en considération le sens du dénivelé : positif si on monte, négatif si on descend. Dans notre cas, OH est bien positif.

Le pourcentage de la pente cherché est égal à : $\frac{OH}{OB} \times 100$, c'est-à-dire en topographie, en divisant le dénivelé par la distance horizontale et en multipliant par 100 pour obtenir un pourcentage.

On a le choix de calculer OB par le théorème de Pythagore et d'en déduire le pourcentage de pente ou alors de déterminer l'angle \widehat{OBH} dont la tangente correspond à $\frac{OH}{OB}$.

Il est d'usage de mettre un signe à l'angle de pente, comme la pente : négatif en descendant et positif en montant.

On sait que :

$$\sin(\widehat{OBH}) = \frac{OH}{BH} = \frac{0,42}{11,93} \text{ d'où } \widehat{OBH} = \sin^{-1}\left(\frac{0,42}{11,93}\right) \approx 2,018^\circ \text{ et } \tan(\widehat{OBH}) \approx \tan(2,018) \approx 0,035$$

Ce qui correspond à une pente d'environ 3,5 % .

Note : En topographie, les angles sont mesurés dans le sens des aiguilles d'une montre et, en France, le plus souvent en grades. Le choix ici a été fait de garder le sens trigonométrique et le degré pour unité afin de faciliter l'appropriation dans un premier temps mais l'adaptation doit être envisagée.

- **Mobilisation d'outils statistiques et de représentation graphique dont tableur-grapheur**

Cet outil est mobilisé dans beaucoup de capacités, en particulier les statistiques à deux variables (nuage de points, coordonnées point moyen, relation entre les deux variables, coefficient de corrélation linéaire, équation des droites de régression, utilisation du modèle pour estimer les valeurs X ou Y, ajustement logarithmique, exponentiel, polynomial). Les apprenants doivent être en mesure d'utiliser toutes les fonctions de traitement de données du tableur y compris les tableaux et les graphiques croisés dynamiques.

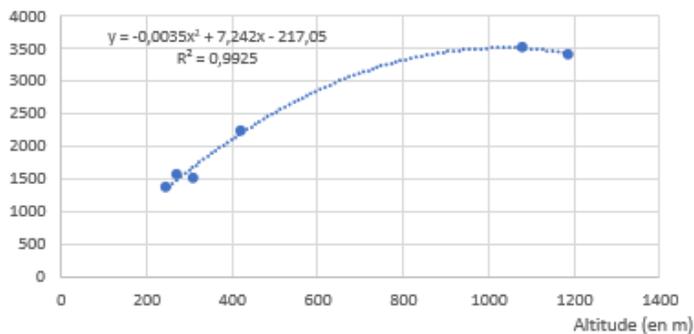
Exemple :

Le relevé des précipitations, du 1^{er} janvier 2023 au 25 novembre 2024, sur certaines des stations météo dans le Haut-Rhin d'Alsace peut se résumer dans le tableau ci-dessous :

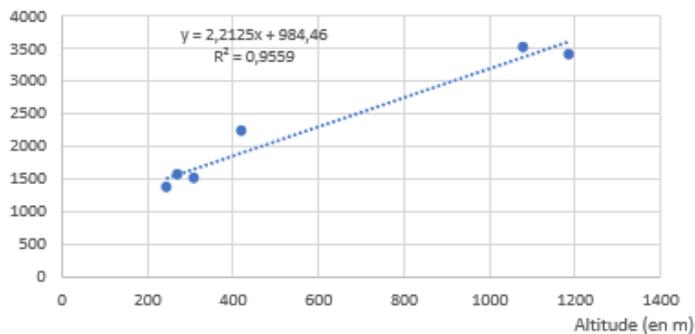
Station	Carspach	Mulhouse	Munster	Guebwiller	Markstein	Orbey
Altitude (m)	309	245	420	273	1184	1080
Quantité de pluie (mm)	1524,2	1389,6	2250,6	1568,6	3421,9	3519,8

A partir de ces données, on peut réaliser un ajustement suivant quatre modèles qui paraissent tous pertinents.

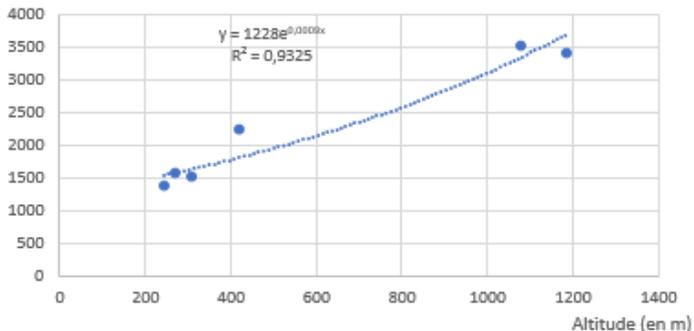
Quantité de pluie (mm)



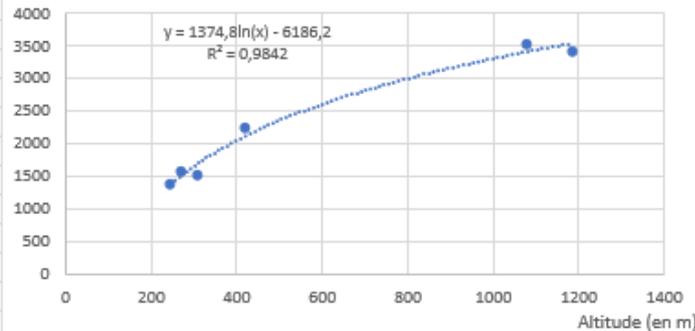
Quantité de pluie (mm)



Quantité de pluie (mm)



Quantité de pluie (mm)



Il convient alors de confronter ces modèles à d'autres relevés et échanger avec des collègues de disciplines techniques pour, au-delà de la corrélation, mettre en évidence un éventuel lien de causalité.

Si on considère le village de Geishouse situé à une altitude de 700 m, de pluviométrie 2400 mm environ sur la période de janvier 2023 à novembre 2024, les modèles linéaires et exponentiels sont les plus adaptés alors même que les coefficients de détermination sont les plus petits, bien que restant très proches de 1. Cela illustre la nécessaire confrontation des résultats mathématiques à la réalité de terrain.

- **Estimation du nombre d'habitants pouvant être desservis par une canalisation d'eaux usées**

Pour une section de 200 mm, la formule de Manning Strickler : $Q = K \times S \times R_h^{2/3} \times I^{1/2}$ où S est la surface mouillée, R_h le rayon hydraulique, I la pente de 0,003 et K le coefficient de Manning-Strickler, ici égal à 70, permet d'estimer le débit.

$S = \pi \frac{0,2^2}{4}$, $R_h = \frac{0,2}{4}$, soit $Q = 0,016 \frac{m^3}{s} = 16L/s$. Ceci constitue le débit de pointe Q_p le plus important acceptable par l'installation.

Le débit moyen et le débit de pointe sont reliés par la formule : $Q_p = C_p Q_m$ où $C_p = 1,5 + \frac{2,5}{\sqrt{Q_m}}$ est le coefficient de pointe (Instruction Technique INT 77-284).

Ainsi Q_m est solution de $Q_p = 1,5Q_m + 2,5\sqrt{Q_m}$, soit $16 = 1,5Q_m + 2,5\sqrt{Q_m}$, que l'on détermine avec un outil numérique. $Q_m \approx 6,44L/s$

Si on considère ici comme ordre de grandeur du rejet des eaux usées 150 L/j/hab, sur une journée de 24h, soit 86400 s, l'évacuation peut être de $86400 \times 6,44 = 556416 L$, ce qui correspond à environ à 3709 habitants.

A partir de cet exemple, on peut aussi à l'inverse, déterminer à partir d'un nombre d'habitants la section de l'installation, faire varier le paramètre de pente, de rejet quotidien par habitant,... pour multiplier les situations.

C 8.3 Concevoir un projet technique adapté à la demande

• Exemple d'application sur AutoCAD :

Un point M de coordonnées cartésiennes $M(x; y)$ de la zone graphique sera repéré par un couple de valeurs (x, y) . La virgule sépare les coordonnées x et y tandis que le point est utilisé comme séparateur de décimale.

Les coordonnées des points peuvent être exprimées en coordonnées cartésiennes absolues, les valeurs sont alors données par rapport au système général de coordonnées, en référence à l'origine (0; 0). x,y ou *x,y

Il sera souvent utile dans un tracé de faire référence, non pas à l'origine mais au dernier point tracé, dans ce cas on utilise des coordonnées relatives. Les coordonnées relatives étant les coordonnées du vecteur entre le dernier point et le point suivant.

Dans AutoCAD, pour indiquer que l'on utilise une référence relative, on la fera précéder du caractère @. @x,y

Les coordonnées polaires expriment la distance entre deux points ainsi que l'angle formé par la droite passant par ces deux points et l'axe des X. Dans les commandes, on note $r<\theta$ avec r la distance et θ l'angle.

Pour la mesure d'un angle, AutoCAD considère que l'axe de référence est l'axe des abscisses et que la mesure positive se lit dans le sens trigonométrique à partir de cet axe.

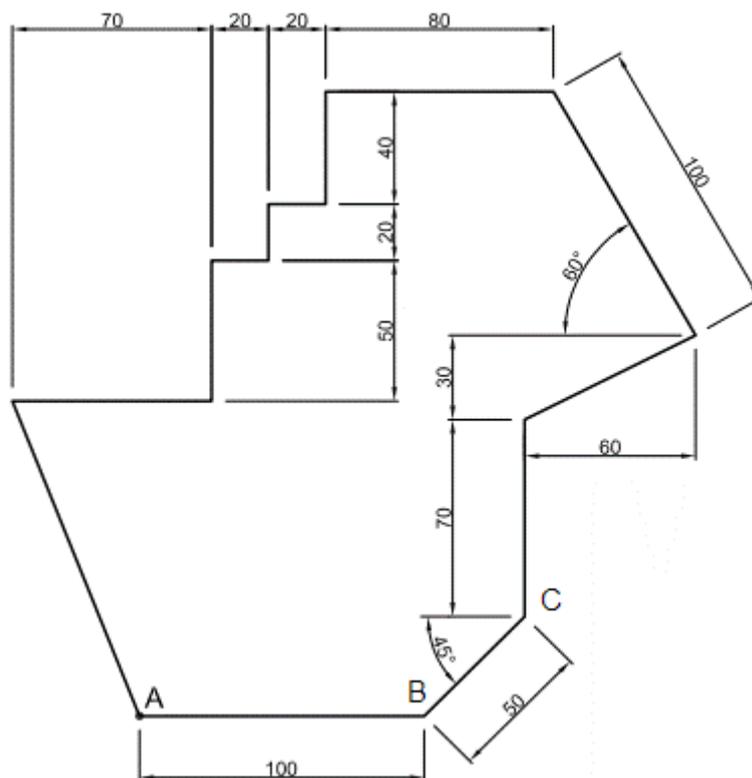
Lorsque le point de référence est l'origine (0,0), ce sont des coordonnées polaires absolues. $r<\theta$ ou * $r<\theta$.

Lorsque ces coordonnées sont exprimées à partir d'un point quelconque précédent (autre que l'origine), elles deviennent des coordonnées polaires relatives. Leur écriture est alors précédée du caractère @. @ $r<\theta$

En général, par défaut, AutoCAD traite les coordonnées comme absolues. Si ce n'est pas le cas, il faudra utiliser le symbole * devant les coordonnées absolues dans les commandes.

Exemple :

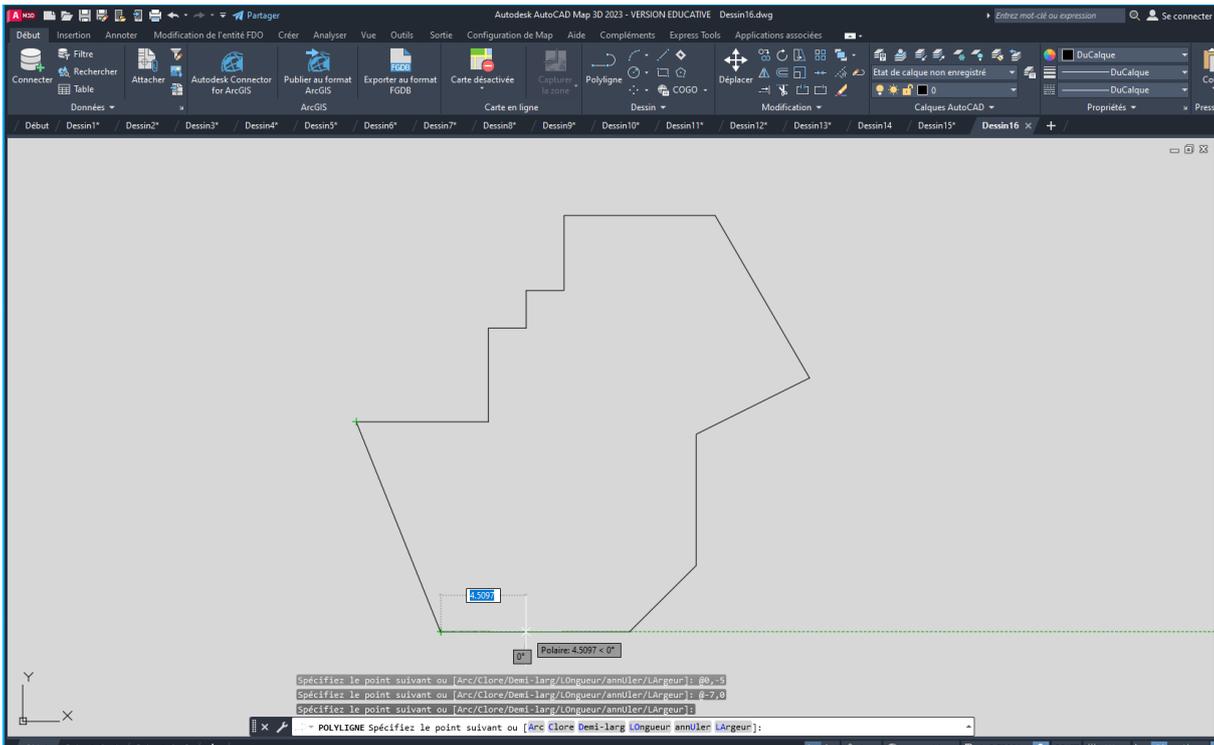
On veut tracer sur AUTOCAD le bassin hydraulique suivant :



On va tout d'abord placer le point A, puis placer les autres points en utilisant des coordonnées polaires relatives ou des coordonnées cartésiennes relatives.

- On saisit bassin hydraulique dans la ligne de commande.
- On spécifie le premier point A en saisissant 0,0
- On spécifie le point suivant B : on saisit @100,0 : cela veut dire que le vecteur $\overrightarrow{AB}(100; 0)$.
- Pour le point C, on utilisera les coordonnées polaires en partant du point B, on saisit @50<45.

- Et ainsi de suite, on obtient au final :



Il est évoqué dans la partie modèles mathématiques pour les écoulements hydrauliques, que la formation aborde :

- Le modèle différentiel pour les écoulements hydrauliques ;
- Les fonctions exponentielles type Ke^{ax} , KA^x ou logarithmes de la forme $a \ln(x) + b$;
- La détermination des extremums d'une fonction à l'aide de la dérivation ;
- Les équations différentielles du 1er ordre et du second ordre à coefficients constants ;
- Le calcul intégral

Les notions d'hydrauliques sont assez difficiles pour des apprenants en BTS. Il ne faut pas hésiter à simplifier les modèles pour appréhender des situations.

Exemple 1: Vidange d'un réservoir

Un réservoir a une section horizontale de 4 m^2 , il est rempli d'eau sur 20 m de haut. L'orifice en bas du réservoir a un diamètre d de $2,5 \text{ cm}$. L'indice 1 identifie les grandeurs en haut du réservoir, l'indice 2 en bas du réservoir.

L'équation de Bernoulli donne : $\frac{v_1^2}{2 \times g} + \frac{P_1}{\rho \times g} + h_1 = \frac{v_2^2}{2 \times g} + \frac{P_2}{\rho \times g} + h_2$

Supposant dans un premier temps que le niveau est maintenu constant donc $v_1 = 0 \text{ m/s}$

$P_1 = P_2 =$ Pression atmosphérique

h définit l'altitude donc $h_2 = 0$ et $h_1 = 20$

L'égalité devient $h_1 = \frac{v_2^2}{2 \times g}$ soit $v_2 = \sqrt{2 \times h_1 \times g} = \sqrt{2 \times 20 \times 9,81} = 19,81 \text{ m/s}$

Dans un deuxième temps, on vidange ce réservoir. Le volume écoulé peut se calculer d'une part avec le débit au point 2 sur un petit intervalle de temps et avec la surface au point 1 sur un petit intervalle de hauteur

$$\text{Volume}_2(t) = Q_2 \times dt = S_2 v_2 dt = \text{Volume}_1(h) = -S_1 \times dh \text{ (hauteur comptée négativement)}$$

Si nous considérons que le niveau dans le réservoir varie très lentement nous pouvons écrire : $v_2 \approx \sqrt{2 \times h \times g}$

$$S_2 \sqrt{2 \times h \times g} dt = -S_1 \times dh$$

$$dt = \frac{-S_1}{S_2} \times \frac{1}{\sqrt{2 \times g}} \times \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

En réalisant, l'intégrale de cette équation entre $t_{\text{initial}} = 0$ et t_{final} pour $h_{\text{initial}} = 20$ et $h_{\text{final}} = 0$

$$\int_{t_{initial}}^{t_{final}} dt = \frac{-S_1}{S_2} \times \frac{1}{\sqrt{2 \times g}} \times \int_{h_{initial}}^{h_{final}} \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

$$[t]_{t_{initial}}^{t_{final}} = \frac{-S_1}{S_2} \times \frac{1}{\sqrt{2 \times g}} \times [2\sqrt{h}]_{h_{initial}}^{h_{final}}$$

$$t_{final} - 0 = \frac{-S_1}{S_2} \times \frac{2}{\sqrt{2 \times g}} \times (\sqrt{h_{final}} - \sqrt{h_{initial}})$$

$$t = \frac{-4}{\left(\frac{\pi \times (2,5 \cdot 10^{-2})^2}{4}\right)} \times \frac{2}{\sqrt{2 \times g}} \times (\sqrt{0} - \sqrt{20}) \approx 16454,5 \text{ s} = 4 \text{ h } 34 \text{ min}$$

Les modèles sont simplifiés, mais les sujets de BTS métiers de l'eau peuvent être des ressources permettant le travail des outils mathématiques :

Exemple 2 : BTS groupement D, mai 2013 :

Les bordures d'autoroute possèdent parfois des bassins de décantation dont le rôle est de recueillir les eaux pluviales ruisselant sur l'asphalte et les éléments polluants qu'elles peuvent drainer. À la suite d'un accident de la circulation, un camion-citerne déverse une partie de son contenu sur la chaussée d'une autoroute. La réglementation en vigueur impose l'isolation, par fermeture de vannes, du bassin de décantation proche de l'accident de façon à ce que la concentration en matières polluantes dans le bassin ne dépasse pas 15 µg/L. Cette concentration est de 1,3 µg/L au moment où les matières polluantes provenant du camion-citerne commencent à se déverser dans le bassin.

On mesure en minute le temps t écoulé à partir de l'instant où les matières polluantes provenant du camion-citerne commencent à se déverser dans le bassin de décantation.

On admet que tant que le bassin n'est pas isolé par fermeture des vannes, la concentration à l'instant t (en minutes) en matières polluantes dans le bassin, exprimée en µg/L peut être modélisée par $f(t)$ où f est solution de l'équation différentielle

$$(E): y' + 0,03y = 0,75 \text{ avec } f(0) = 1,3$$

L'étudiant doit être capable de résoudre l'équation différentielle homogène associée puis de rechercher une solution particulière constante solution de l'équation (E). La fonction f définie par $f(t) = 25 - 23,7e^{-0,03t}$ étant déterminée, on peut étudier, puis représenter cette fonction f pour estimer temps au bout duquel la concentration atteindra les 15 µg/L s'il n'y avait pas de vannes de sécurité.

La concentration en matières polluantes dans le bassin est relevée par un capteur dont les mesures sont légèrement instables. Pour prendre en compte cette instabilité, on met en place un dispositif associant la fermeture des vannes à l'instant t ($t > 2$) à la valeur moyenne de la concentration en matières polluantes mesurée par le capteur entre les instants $t-2$ et t . La fermeture des vannes est déclenchée lorsque cette valeur moyenne $V(t) = \frac{1}{2} \int_{t-2}^t f(t) dt$ atteint 14 µg/L et il est donc possible de déterminer cette valeur t .

Un autre exemple : [Le sujet BTS groupement D2 de mai 2025](#), [Sujet métropole STAV, 2017, exercice 3](#)