CORRIGÉS

Exercice 2

A - Tirages sans remise

❶ **1°) -** Il y a $A_{1\,843}^{25} \simeq 3{,}690\,83 \times 10^{81}$ échantillons ordonnés constitués sans remise.

❷ La probabilité d'avoir exactement 15 billes blanches dans l'échantillon est :

$$\frac{\binom{25}{15} \times A_{1\,000}^{15} \times A_{843}^{10}}{A_{1\,843}^{25}} = \frac{\binom{25}{15} \times 1\,000 \times 999 \times ... \times 986 \times 843 \times 842 \times ... \times 834}{1\,843 \times 1\,842 \times ... \times 1\,819}$$. C'est environ 0,136 912.

Remarque : Si on ne tient pas compte de l'ordre, il y a $\binom{1\,843}{25} \simeq 2{,}379\,46 \times 10^{56}$ échantillons et la probabilité cherchée est : $\dfrac{\binom{1\,000}{15} \times \binom{843}{10}}{\binom{1\,843}{25}} = \dfrac{\dfrac{A_{1\,000}^{15}}{15!} \times \dfrac{A_{843}^{10}}{10!}}{\dfrac{A_{1\,843}^{25}}{25!}} = \dfrac{\binom{25}{15} \times A_{1\,000}^{15} \times A_{843}^{10}}{A_{1\,843}^{25}}$ qui donne le même résultat !

❸ La probabilité d'avoir exactement k billes blanches dans l'échantillon est :

$$\frac{\binom{25}{k} \times A_{1\,000}^{k} \times A_{843}^{25-k}}{A_{1\,843}^{25}} = \frac{\binom{25}{k} \times 1\,000 \times 999 \times ... \times (1\,000 - k + 1) \times 843 \times 842 \times ... \times (843 - 25 + k + 1)}{1\,843 \times 1\,842 \times ... \times 1\,819}$$

B - Tirages avec remise

❶ Il y a $1\,843^{25} \simeq 4{,}346\,44 \times 10^{81}$ échantillons constitués avec remise.

❷ La probabilité d'avoir exactement 15 billes blanches dans l'échantillon est

$$\frac{\binom{25}{15} \times 1\,000^{15} \times 843^{10}}{1\,843^{25}} \simeq 0{,}136\,309.$$

❸ La probabilité d'avoir exactement k billes blanches dans l'échantillon est $\dfrac{\binom{25}{k} \times 1\,000^{k} \times 843^{25-k}}{1\,843^{25}}$.

Exercice 3

On étudie un caractère qualitatif (être de couleur rouge) de proportion 0,60 dans la population mère.

On tire au hasard un échantillon de taille 20.

Soit R la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 20 billes issu de l'urne, associe le nombre de billes rouges. R suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20 ; 0,6)$.

1°) - La probabilité qu'un échantillon de 20 billes contienne un nombre égal de billes rouges et blanches est $P(R = 10) = \binom{20}{10} \times 0,6^{10} \times 0,4^{10} = 0,117$. On peut donc s'attendre à trouver $0,117 \times 50 \approx 6$ échantillons contenant autant de billes rouges que de billes blanches.

2°) - La probabilité qu'un échantillon de 20 billes contienne 12 billes rouges et 8 blanches est $P(R = 12) = \binom{20}{12} \times 0,6^{12} \times 0,4^{8} = 0,18$. On peut donc s'attendre à trouver $0,18 \times 50 = 9$ échantillons contenant 12 billes rouges et 8 blanches.

3°) - La probabilité qu'un échantillon de 20 billes contienne 8 billes rouges et 12 blanches est $P(R = 8) = \binom{20}{8} \times 0,6^{8} \times 0,4^{12} = 0,035$. On peut donc s'attendre à trouver $0,035 \times 50 \approx 2$ échantillons contenant 8 billes rouges et 12 blanches.

4°) - La probabilité qu'un échantillon de 20 billes contienne 10 billes blanches ou davantage est

$$P(B \geq 10) = P(R \leq 10) = P(R = 0) + P(R = 1) + P(R = 2) + P(R = 3) + P(R = 4) + P(R = 5) + P(R = 6) + P(R = 7) + P(R = 8) + P(R = 9) + P(R = 10)$$

$$= 0,4^{20} + \binom{20}{1} \times 0,6 \times 0,4^{19} + \binom{20}{2} \times 0,6^{2} \times 0,4^{18} + \binom{20}{3} \times 0,6^{3} \times 0,4^{17} + \binom{20}{4} \times 0,6^{4} \times 0,4^{16} + \binom{20}{5} \times 0,6^{5} \times 0,4^{15}$$

$$+ \binom{20}{6} \times 0,6^{6} \times 0,4^{14} + \binom{20}{7} \times 0,6^{7} \times 0,4^{13} + \binom{20}{8} \times 0,6^{8} \times 0,4^{12} + \binom{20}{9} \times 0,6^{9} \times 0,4^{11} + \binom{20}{10} \times 0,6^{10} \times 0,4^{10}$$

$$\approx 0 + 0 + 0 + 0 + 0,0003 + 0,0013 + 0,0049 + 0,0146 + 0,0355 + 0,0710 + 0,1171 \simeq 0,2447.$$

On peut donc s'attendre à trouver $0,2447 \times 50 \approx 12$ échantillons contenant 10 billes blanches ou davantage.

Exercice 4

On étudie un caractère qualitatif (être un garçon) de proportion 0,52 dans la population mère. On tire un échantillon de taille 80. On suppose que l'effectif de la population mère est suffisamment important pour que le tirage de l'échantillon puisse être assimilé à un tirage avec remise.

1°) - Soit G la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 80 nouveau-nés, associe le pourcentage de garçons. Comme $80 \geq 30$, $80 \times 0,52 \geq 15$ et $80 \times 0,52 \times 0,48 > 5$, la loi de G est approchée par la loi normale $\mathcal{N}\left(0,52 ; \sqrt{\frac{0,52 \times 0,48}{80}}\right)$ ou encore $\mathcal{N}(0,52 ; 0,056)$.

La probabilité d'avoir, dans un échantillon de taille 80, un pourcentage de garçons entre 50 % et 54 % est : $P(0,5 \leq G \leq 0,54) \approx P\left(\frac{0,5 - 0,52}{0,056} \leq \frac{G - 0,52}{0,056} \leq \frac{0,54 - 0,52}{0,056}\right) \approx P(-0,36 \leq U \leq 0,36) \approx 0,2812$ où U suit la loi normale centrée, réduite.

2°) - La probabilité d'avoir un pourcentage de filles inférieur à 45 % est la probabilité d'avoir un pourcentage de garçons supérieur à 0,55. C'est $P(G \geq 0{,}55) \approx P\left(\dfrac{G-0{,}52}{0{,}056} \geq \dfrac{0{,}55-0{,}52}{0{,}056}\right) \approx P(U \geq 0{,}54) \approx 0{,}2946$.

Exercice 5

On étudie un caractère qualitatif (être en faveur du candidat pour les votants) de proportion 0,46 dans la population mère. On tire un échantillon de taille 200, puis 1000. On suppose que l'effectif de la population mère est suffisamment important pour que le tirage de l'échantillon puisse être assimilé à un tirage avec remise.

1°) - Soit F la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 200 votants, associe le pourcentage de votants pour le candidat. Comme $200 \geq 30$, $200 \times 0{,}46 \geq 15$ et $200 \times 0{,}46 \times 0{,}54 > 5$, la loi de F est approchée par la loi normale $\mathcal{N}\left(0{,}46\,;\sqrt{\dfrac{0{,}46 \times 0{,}54}{200}}\right)$ ou encore $\mathcal{N}(0{,}46\,;\,0{,}035)$.

Le candidat obtient la majorité absolue dans l'échantillon de 200 votants dès qu'il obtient au moins 101 voix.

Or, 100 voix correspondent à la valeur 0,5 de F et 101 voix à 0,505 ; la correction de continuité donne $F \geq 0{,}5025$ pour avoir la majorité absolue, puisque $0{,}5025 = \dfrac{0{,}5+0{,}505}{2}$.

La probabilité que le vote de 200 votants choisis au hasard parmi les votants donne la majorité absolue à ce candidat est : $P(F \geq 0{,}5025) \approx P\left(\dfrac{F-0{,}46}{0{,}035} \geq \dfrac{0{,}5025-0{,}46}{0{,}035}\right) \approx P(U > 1{,}21) \approx 1 - 0{,}8869 = 0{,}113$ où U suit la loi normale centrée, réduite.

Un calcul avec la loi binomiale donne $P(200\,F \geq 101) \approx 0{,}114$.

2°) - Soit G la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 1 000 votants, associe le pourcentage de votants pour le candidat. Comme $1\,000 \geq 30$, $1\,000 \times 0{,}46 \geq 15$ et $1\,000 \times 0{,}46 \times 0{,}54 > 5$, la loi de G est approchée par la loi normale $\mathcal{N}\left(0{,}46\,;\sqrt{\dfrac{0{,}46 \times 0{,}54}{1\,000}}\right)$ ou encore $\mathcal{N}(0{,}46\,;\,0{,}0158)$.

Le candidat obtient la majorité absolue dans un échantillon de 1 000 votants dès qu'il obtient au moins 501 voix, 500 voix correspondent à la valeur 0,5 de G et 501 voix à 0,501 ; la correction de continuité donne $G \geq 0{,}5005$ pour avoir la majorité absolue.

La probabilité que le vote de 1 000 votants choisis au hasard parmi les votants donne la majorité absolue à ce candidat est : $P(G \geq 0{,}5005) \approx P\left(\dfrac{G-0{,}46}{0{,}0158} \geq \dfrac{0{,}5005-0{,}46}{0{,}0158}\right) \approx P(U > 2{,}56) \approx 1 - 0{,}9948 = 0{,}0052$.

Un calcul avec la loi binomiale donne $P(1\,000\,F \geq 501) \approx 0{,}00514$.

Exercice 6

On étudie un caractère quantitatif (durée de vie) de moyenne 800 h et d'écart type 60 h dans la population mère.

On tire un échantillon de taille 36.

On suppose que l'effectif de la population mère est suffisamment important pour que le tirage de l'échantillon puisse être assimilé à un tirage avec remise.

Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire qui à chaque échantillon aléatoire de 36 tubes, associe sa durée de vie moyenne.

La loi de $\overline{X}$ est approchée par la loi normale $\mathcal{N}(800\,;\,10)$ car la taille de l'échantillon $60 \geq 30$.

1°) - La probabilité que la moyenne de durée de vie d'un tel échantillon soit comprise entre 790 et 810 heures est :

$$P(790 < \overline{X} < 810) = P\left(\frac{790-800}{10} < \frac{\overline{X}-800}{10} < \frac{810-800}{10}\right) = P(-1 < U < 1) = 2 \times (0{,}8413 - 0{,}5) = 0{,}6826$$ où

U suit la loi normale centrée, réduite.

2°) - La probabilité que la moyenne de durée de vie d'un tel échantillon soit inférieure à 785 heures est :

$$P(\overline{X} < 795) = P\left(\frac{\overline{X}-800}{10} < \frac{785-800}{10}\right) = P(U < -1{,}5) = 1 - P(U < 1{,}5) \approx 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668.$$

3°) - La probabilité que la moyenne de durée de vie d'un tel échantillon soit supérieure à 820 heures est :

$$P(\overline{X} > 800) = P\left(\frac{\overline{X}-800}{10} > \frac{820-800}{10}\right) = P(U > 2) \approx 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228.$$

4°) - La probabilité que la moyenne de durée de vie d'un tel échantillon soit comprise entre 770 et 830 heures est :

$$P(770 < \overline{\mathrm{X}} < 830) = P\left(\frac{770-800}{10} < \frac{\overline{X}-800}{10} < \frac{830-800}{10}\right) = P(-3 < U < 3) \approx 2 \times (0{,}99865 - 0{,}5) = 0{,}9973.$$

Exercice 7

On étudie un caractère quantitatif (masse) de moyenne 300 kg et d'écart type 50 kg dans la population mère.

On tire un échantillon de taille 25. On suppose que l'effectif de la population mère est suffisamment important pour que le tirage de l'échantillon puisse être assimilé à un tirage avec remise.

Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 25 paquets associe la masse moyenne des paquets.

La loi de $\overline{X}$ est la loi normale $\mathcal{N}(300\,;\,10)$ car le caractère est distribué normalement dans la population.

La probabilité qu'un groupe de 25 paquets reçus au hasard et chargés sur un monte-charge dépasse la limite de sécurité du monte-charge de 8 200 kg est :

$P(25\ \overline{X} > 8\,200) = P(\overline{X} > 328) = P\left(\frac{\overline{X}-300}{10} > \frac{328-300}{10}\right) = P(U > 2{,}8) \approx 1 - 0{,}9974 = 0{,}0026$ où U suit la loi normale centrée, réduite.

Exercice 8

<u>Population</u> : ensemble des paquets de lessive   <u>Caractère</u> : masse (quantitatif)

On constitue un échantillon de taille 40 pouvant être considéré comme ayant été constitués avec remise.

Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire associant à chaque échantillon constitué avec remise de 40 paquets, la masse moyenne en kilogrammes des paquets.

La loi de la variable aléatoire $U = \dfrac{\overline{X}-5{,}1}{0{,}05/\sqrt{40}} = \dfrac{\overline{X}-5{,}1}{0{,}008}$ est approchée par la loi normale $\mathcal{N}(0\,;\,1)$ car $40 \geq 30$.

1°) $P(\overline{X} \leq 5{,}08) = P\left(\frac{\overline{X}-5{,}1}{0{,}008} \leq \frac{5{,}08-5{,}1}{0{,}008}\right) = P(U \leq -2{,}5) \simeq 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062.$

2°) $P(\overline{X} \geq 5{,}1) = P\left(\frac{\overline{X}-5{,}1}{0{,}008} \geq \frac{5{,}1-5{,}1}{0{,}008}\right) = P(U \geq 0) = 0{,}5.$

3°) $P(5{,}08 \leq \overline{X} \leq 5{,}12) = P\left(\frac{5{,}08-5{,}1}{0{,}008} \leq \frac{\overline{X}-5{,}1}{0{,}008} \leq \frac{5{,}12-5{,}1}{0{,}008}\right) \simeq P(-2{,}5 \leq U \leq 2{,}5) \simeq 0{,}9876.$

Exercice 9

<u>Population</u> : ensemble des paires d'écritures de médecins et d'avocats

<u>Caractère</u> : "être reconnue par le candidat" (qualitatif)

On constitue un échantillon de 12 paires d'écritures.

1° a) - Soit N la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses fournies par un candidat répondant au hasard. N suit la loi binomiale de paramètres 12 et 0,5. Voici la la loi de probabilité de N :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(N = k)$	0,0002	0,0029	0,0161	0,0537	0,1208	0,1934	0,2256	0,1934	0,1208	0,0537	0,0161	0,0029	0,0002

La probabilité d'embaucher un candidat répondant au hasard est $P(N \geq 9) \approx 0{,}0729$.

b) - La probabilité d'embaucher un candidat répondant au hasard est $P(N \geq 10) \approx 0{,}0192$.

On constitue un échantillon de 13 paires d'écritures.

c) - Soit Q la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses fournies par un candidat répondant au hasard. Q suit la loi binomiale de paramètres 13 et 0,5. Voici la la loi de probabilité de Q :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$P(Q = k)$	0,0001	0,0016	0,0095	0,0349	0,0873	0,1571	0,2095	0,2095	0,1571	0,0873	0,0349	0,0095	0,0016	0,0001

$P(Q \geq 13) \simeq 0{,}0001$, $P(Q \geq 12) \simeq 0{,}0017$, $P(Q \geq 11) \simeq 0{,}0112$, $P(Q \geq 10) \simeq 0{,}0461$, $P(Q \geq 9) \simeq 0{,}1334$

Le plus petit nombre de bonnes réponses à exiger pour que la probabilité d'embaucher un candidat répondant au hasard soit inférieure à 0,05 est 10.

2°) - Soit R la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses fournies par le candidat. R suit la loi binomiale de paramètres 13 et 0,85. La loi de probabilité de R est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$P(R = k)$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0011	0,0063	0,0266	0,0838	0,1900	0,2937	0,2774	0,1209

$P(R < 10) \approx 0{,}1179$.

Exercice 10

<u>Population</u> : ensemble des pièces d'un lot

<u>Caractère</u> : défectuosité (qualitatif)

On constitue un échantillon de taille 500 pouvant être considéré comme ayant été constitués avec remise.

Soit N la variable aléatoire associant à chaque échantillon constitué avec remise de 500 pièces, le nombre de pièces défectueuses de l'échantillon.

1°) - Si la proportion de défectueux du lot est 3 %, la loi de la variable aléatoire $U = \dfrac{N - 15}{\sqrt{500 \times 0{,}03 \times 0{,}97}}$ est approchée par la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$ car $500 \geq 30$, $500 \times 0{,}03 \geq 15$ et $500 \times 0{,}03 \times 0{,}97 > 5$.

La probabilité que le lot testé soit refusé est $P(N \geq 22) = P(N \geq 21{,}5) \simeq P(U \geq 1{,}704) \simeq 0{,}044$.

2°) - Si la proportion de défectueux est 6 %, la loi de la variable aléatoire $V = \dfrac{N - 30}{\sqrt{500 \times 0{,}06 \times 0{,}94}}$ est approchée par la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$ car $500 \geq 30$, $500 \times 0{,}06 \geq 15$ et $500 \times 0{,}06 \times 0{,}94 > 5$.

La probabilité que le lot testé soit accepté est $P(N \leq 21) = P(N \leq 21{,}5) \simeq P(V \geq -1{,}6) \simeq 0{,}055$.

Autre façon de traiter le problème :

<u>Population</u> : Ensemble des pièces d'un lot   <u>Caractère</u> : défectuosité (qualitatif)

Il y a une proportion p de pièces défectueuses dans le lot.

Les échantillons de 500 pièces peuvent être considérés comme constitués avec remise car la taille des échantillons est faible par rapport à la taille du lot.

Soit N la variable aléatoire donnant pour chaque échantillon de 500 pièces, le nombre de pièces défectueuses. N suit la loi binomiale de paramètres 500 et p. Soit F la variable aléatoire donnant pour chaque échantillon, la proportion de pièces défectueuses.

1°) - Si la proportion de défectueux du lot est 3 %, la loi de F peut être approchée par la loi normale de paramètre 0,03 et $\sqrt{\dfrac{0,03 \times 0,97}{500}}$, soit $\mathcal{N}(0,03 \,;\, 0,00763)$ car $500 \geq 30$ et $500 \times 0,03 \geq 15$ et $500 \times 0,03 \times 0,97 > 5$. Dans ces conditions, la loi de $U = \dfrac{F - 0,03}{0,00763}$ peut être approchée par la loi normale centrée réduite

La probabilité que le lot testé soit refusé est $\mathrm{P}(N \geq 22) = \mathrm{P}(N > 21,5) \simeq \mathrm{P}(F \geq 0,043) \simeq \mathrm{P}(U \geq 1,704) \simeq 0,044$.

2°) - Si la proportion de défectueux du lot est 6 %, la loi de F peut être approchée par la loi normale de paramètres 0,06 et °$\sqrt{\dfrac{0,06 \times 0,94}{500}}$, soit $\mathcal{N}(0,06 \,;\, 0,0106)$ car $500 \geq 30$ et $500 \times 0,06 \geq 15$ et $500 \times 0,06 \times 0,94 > 5$. Dans ces conditions, la loi de $V = \dfrac{F - 0,06}{0,0106}$ peut être approchée par la loi normale centrée réduite.

La probabilité que le lot testé soit refusé est $\mathrm{P}(N \leq 21) = \mathrm{P}(N \leq 21,5) \simeq \mathrm{P}(F \leq 0,043) \simeq \mathrm{P}(V \leq -1,6) \simeq 0,055$.

<u>Remarque</u> : On aurait aussi raisonner avec les lois binomiales. Alors $\mathrm{P}(N \geq 22) \simeq 0,050$ et $\mathrm{P}(N \leq 21) \simeq 0,049$

Exercice 11

<u>Population</u> : Ensemble des pièces de la production

<u>Caractère</u> : diamètre (quantitatif)

Le caractère a une moyenne μ dans la population. Les échantillons de 36 pièces peuvent être considérés comme bernoullien car la taille des échantillons est faible par rapport à la taille de la population.

Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire donnant pour chaque échantillon, le diamètre moyen des pièces en centimètres.

Comme le caractère est distribué normalement dans la population, la loi de $\dfrac{\overline{X} - \mu}{0,04}$ est la loi normale centrée réduite.

1°) - Si le procédé de fabrication fonctionne selon la loi normale $\mathcal{N}(5 \,;\, 0,24)$. la loi de $T = \dfrac{\overline{X} - 5}{0,04}$ est la loi normale centrée réduite. La probabilité d'arrêter inutilement la fabrication est :

$\mathrm{P}\left[\overline{X} < 4,92 \text{ ou } \overline{X} > 5,08\right] \simeq 1 - \mathrm{P}\left[4,92 \leq \overline{X} \leq 5,08\right] \simeq 1 - \mathrm{P}\left[-2 \leq T \leq 2\right] \simeq 1 - 0,9544 = 0,046$.

2°) - Si le procédé est centré à 5,1 cm, la loi de $Z = \dfrac{\overline{X} - 5,1}{0,04}$ est la loi normale centrée réduite. La probabilité de conclure que le procédé fonctionne correctement est $\mathrm{P}\left[4,92 \leq \overline{X} \leq 5,08\right] \simeq \mathrm{P}\left[-4,5 \leq Z \leq -0,06\right] \simeq 0,476$.
