Moyenne et variance d'échantillonnage

On considère n variables aléatoires indépendantes X_i ($1 \le i \le n$).

Pour tout i, $1 \le i \le n$, les X_i ont même espérance $\mathrm{E}(X_i) = \mu$ et même variance $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$.

On s'intéresse à deux variables aléatoires : - la moyenne d'échantillonnage $\overline{X} = \frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i$;

- la variance d'échantillonnage $\mathrm{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$.

Espérance et variance de $\overline{X}$

$$\mathrm{E}\left(\overline{X}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{n} \times n\mu = \mu.$$

$$\sigma^2\left(\overline{X}\right) = \sigma^2\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{X_i}\right) = \frac{1}{\mathrm{n}^2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{V}(\mathrm{X_i})$$ car les variables aléatoires X_i sont indépendantes.

$$\sigma^2\left(\overline{X}\right) = \frac{1}{n^2} \times n\,\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Espérance de S^2

$$\mathrm{E}(S^2) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2\right) = \frac{1}{n}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \mu + \mu - \overline{X}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \left[(X_i - \mu)^2 + 2(X_i - \mu)(\mu - \overline{X}) + (\mu - \overline{X})^2\right]\right)$$

$$= \frac{1}{n}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 + 2\,(\mu - \overline{X})\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) + n\,(\mu - \overline{X})^2\right))$$

$$= \frac{1}{n}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - 2\,n\,(\mu - \overline{X})^2 + n\,(\mu - \overline{X})^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - n\,(\mu - \overline{X})^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left((\mathrm{X_i} - \mu)^2\right) - \mathrm{E}\left((\mu - \overline{X})^2\right).$$

$$= \frac{1}{n}\,n\,\mathrm{Var}(\mathrm{X_i}) - \mathrm{Var}\left(\overline{X}\right) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\,\sigma^2.$$

La variable aléatoire, variance corrigée, $\hat{S}^2 = \frac{n}{n-1} S^2$ a pour espérance mathématique σ^2.