Exercice 1

Une estimation ponctuelle de la proportion p d'électeurs favorables au candidat A est $\frac{45}{150} = 30\ \%$.

Exercice 2

Une estimation ponctuelle de la moyenne μ de la masse des plaques de beurre emballées est $m_é \approx 250{,}24$ g.

Une estimation ponctuelle de l'écart-type σ de la masse des plaques de beurre emballées dans la production est $\widehat{s_é} \approx 1{,}6728$ g.

Exercice 3

Un intervalle de confiance de la proportion de personnes de la ville nées en janvier, au niveau de 95 %, est :

$\left[\frac{2}{25} - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{\frac{2}{25} \times \frac{23}{25}}{400}} ; \frac{2}{25} + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{\frac{2}{25} \times \frac{23}{25}}{400}}\right] \approx [0{,}054 ; 0{,}107] = [5{,}4\ \% ; 10{,}7\ \%]$.

Exercice 4

1°) $\widehat{s_é} = 0{,}2 \times \sqrt{\frac{60}{59}} \approx 0{,}20169$.

2°) - Une estimation de μ par intervalle de confiance au seuil de 10 % de μ est $[1{,}457 ; 1{,}543]$..

Exercice 5

Un intervalle de confiance de p, au seuil de 1 %, est : $\left[f_é - 2{,}57\sqrt{\frac{f_é\,(1 - f_é)}{\mathrm{I}}} ; f_é + 2{,}57\sqrt{\frac{f_é\,(1 - f_é)}{n}}\right]$.

$f_é$ est une valeur approchée de p à 0,05 près, si $2{,}57\sqrt{\frac{f_é\,(1 - f_é)}{n}} \leq 0{,}05$.

On trouve $n \geq \frac{2{,}57^2 f_é\,(1 - f_é)}{0{,}05^2}$. Or, on ne connaît pas $f_é$ mais $f_é\,(1 - f_é) = f_é - f_é^2 = \frac{1}{4} - \left(f_é - \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{4}$.

L'inégalité $n \geq \frac{2{,}57^2 f_é\,(1 - f_é)}{0{,}05^2}$ est vraie en particulier dès que $n \geq \frac{2{,}57^2 \times 1/4}{0{,}05^2}$, on trouve $n > 661$.

Remarque : La proportion d'individus du groupe O dans la population française est environ 1/3. En remplaçant $f_é$ par 1/3 dans $2{,}57\sqrt{\frac{f_é\,(1 - f_é)}{n}}$, on obtient $n > 588$ et on a le même ordre de grandeur.

Exercice 6

L'intervalle de confiance de la proportion d'électeurs favorables au candidat Martin au seuil de 5 % est :

$\left[f_é - 1{,}96\sqrt{\frac{f_é\,(1 - f_é)}{n}} ; f_é + 1{,}96\sqrt{\frac{f_é\,(1 - f_é)}{n}}\right]$ où $f_é$ est la fréquence et n la taille de l'échantillon.

L'intervalle de confiance donné permet de dire que

$$f_é - 1{,}96\sqrt{\frac{f_é\,(1 - f_é)}{n}} = 0{,}3472 \quad \text{et} \quad f_é + 1{,}96\sqrt{\frac{f_é\,(1 - f_é)}{n}} = 0{,}4337$$

On a alors $f_é = \frac{0{,}4337 + 0{,}3472}{2} = 0{,}39045$ et $2 \times 1{,}96\sqrt{\frac{f_é\,(1 - f_é)}{n}} = 0{,}4337 - 0{,}3472$.

On en déduit que $n \approx 489$.

Exercice 7

❶ Une estimation ponctuelle de p est $\frac{17}{110} \simeq 15{,}5\ \%$.

❷ Un intervalle de confiance de p au niveau 95 % au vu de l'échantillon est $\left[0{,}155 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}155\,(1-0{,}155)}{110}}\ ;\ 0{,}155 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}155\,(1-0{,}155)}{110}}\right]$ soit $[0{,}087\ ;\ 0{,}223]$.

❸ On sait que $\frac{90}{N} = p$, ainsi $N = \frac{90}{p}$ et l'encadrement de p précédent donne l'encadrement de N : $403 < N < 1\,035$.

Exercice 8

Dans la population des fils de coton, on s'intéresse à la résistance à la rupture qui est un caractère quantitatif ; soit μ la moyenne en kg de cette résistance. On constitue un échantillon de taille 12 que l'on peut considérer comme bernoullien car l'effectif de la population est grand par rapport à 12.

Soient $\overline{X}$ et $\hat{S}$ sont les variables aléatoires qui, à chaque échantillon de taille 12, associent respectivement la moyenne et l'écart-type corrigé de la résistance à la rupture des fils dans l'échantillon.

La loi de la variable $T = \frac{\overline{X} - \mu}{\hat{S}/\sqrt{12}}$ est la loi de Student à $12 - 1 = 11$dégrés de liberté car le caractère est réparti normalement dans la population.

a) Le seuil de confiance est $\alpha = 5\ \%$. On cherche $t_{0,05}$ tel que $\mathrm{P}\left(|T| < t_{0,05}\right) = 0{,}95$ ou encore $\mathrm{P}\left(|T| \geq t_{0,05}\right) = 0{,}05$, la table des lois de Student donne $t_{0,05} = 2{,}201$.

On fait confiance au hasard à 95 % et on suppose que $-2{,}201 \leq \frac{7{,}38 - \mu}{\frac{1{,}24}{\sqrt{11}}} \leq 2{,}201$.

Un intervalle de confiance de la résistance de rupture avec le niveau de confiance de 95 % est [6,557 ; 8,202].

b) - On cherche $t_{0,01}$ tel que $\mathrm{P}\left(|T| < t_{0,01}\right) = 0{,}99$ ou encore $\mathrm{P}\left(|T| \geq t_{0,01}\right) = 0{,}01$, la table des lois de Student donne $t_{0,01} \approx 3{,}106$.

Un intervalle de confiance de la résistance de rupture avec le niveau de confiance de 99 % est [6,218 ; 8,541].

Exercice 9

Dans la population des réservoirs, on s'intéresse à la résistance à l'éclatement qui est un caractère quantitatif ; soit μ la moyenne en kg/cm² de cette résistance. On constitue un échantillon de taille 10 que l'on peut considérer comme bernoullien car l'effectif de la population est grand par rapport à 10.

Soient $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de taille 10, associe la moyenne de la résistance à l'éclatement des réservoirs dans l'échantillon. La loi de la variable $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{3/\sqrt{10}}$ est la loi la loi normale centrée réduite car le caractère est réparti normalement dans la population.

Le seuil de confiance est $\alpha = 5\ \%$. On cherche $u_{0,05}$ tel que $P(|T| < u_{0,05}) = 0,95$ ou encore $P(|T| \geq u_{0,05}) = 0,05$, la table de la loi normale centrée réduite donne $u_{0,05} \approx 1,96$.

On fait confiance au hasard à 95 % et on suppose que $-1,96 \leq \dfrac{219\text{-}\mu}{\frac{3}{\sqrt{10}}} \leq 1,96$.

Un intervalle de confiance de la résistance à l'éclatement avec le niveau de confiance de 95 % est [217,14 ; 220,86].

Exercice 10

1°) - La moyenne des coûts est estimée ponctuellement par la moyenne des coûts dans l'échantillon, donc par 908,83 €. L'écart-type du coût de main d'œuvre par lot produit est estimé par l'écart-type corrigé de l'échantillon, donc par 72,28 €.

2°) - Dans la population des lots produits, on s'intéresse au coût de la main d'œuvre directe (caractère quantitatif) ; soit μ la moyenne des coûts dans la population. On constitue un échantillon de taille 12 que l'on peut considérer comme bernoullien car l'effectif de la population est grand par rapport à 12.

Soient $\overline{X}$ et $\hat{S}$ sont les variables aléatoires qui, à chaque échantillon de taille 12, associent respectivement la moyenne et l'écart-type corrigé du coût dans l'échantillon.

La loi de la variable $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\hat{S}/\sqrt{12}}$ est la loi de Student à $12 - 1 = 11$ degrés de liberté car le caractère est réparti normalement dans la population.

Le seuil de confiance est $\alpha = 5\ \%$. On cherche $t_{0,05}$ tel que $P(|T| < t_{0,05}) = 0,95$ ou encore $P(|T| \geq t_{0,05}) = 0,05$, la table des lois de Student donne $t_{0,05} \approx 2,201$.

On fait confiance au hasard à 95 % et on suppose que $-2,201 \leq \dfrac{908,23 - \mu}{\frac{75,49}{\sqrt{11}}} \leq 2,201$.

Un intervalle de confiance du coût avec le niveau de confiance de 95 % est [860,86 ; 956,80].
