Exemple 1

Population : Ensemble des personnes atteintes de l'allergie étudiée.

Caractère : Guérison en 8 heures par le médicament (qualitatif)

Il s'agit d'un test sur la proportion p de personnes guéries par le médicament dans un délai de 8 heures.

H_0 : "Le médicament est efficace à 90 % (ou plus)", ce qui s'écrit "$p = 90$ %".

H_1 : "Le médicament est efficace à moins de 90 % ", ce qui s'écrit "$p < 90$ %" (test unilatéral).

Variable de décision : $T = \dfrac{F - 0{,}9}{\sqrt{\dfrac{0{,}9\,(1-0{,}9)}{200}}}$ où F est la variable aléatoire qui associe, à chaque échantillon de taille 200, la proportion de personnes guéries par le médicament dans un délai de 8 heures.

Sous l'hypothèse H_0, la loi de T est approchée par la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,,1)$ car $200 \geq 30$, $200 \times 0{,}9 = 180 > 15$ et $200 \times 0{,}9 \times 0{,}1 = 18 > 5$.

Le seuil de signification est $\alpha = 5$ % et $P(T \geq -1{,}645) \simeq 0{,}95$.

Zone de rejet de H_0 : $]-\infty\,;-1{,}645[$. **Zone d'acceptation de H_0 :** $[-1{,}645\,;+\infty[$.

Règle de décision :

Si $t_{obs} \geq -1{,}645$, on accepte H_0 et on admet que le médicament est efficace à 90 %.

Si $t_{obs} < -1{,}645$, on refuse H_0 au profit de H_1 et on admet que le médicament est efficace moins de 90 %..

Mise en œuvre du test : $t_{obs} \simeq -4{,}71$. On refuse H_0. L'affirmation du fabricant est remise en cause.

Exemple 2

On travaille sur des parcelles plantées en variété B.

Caractère : Rendement de la parcelle (quantitatif)

Il s'agit d'un test sur la moyenne μ des rendements en quintaux à l'hectare de la variété B.

H_0 : "Le rendement moyen de la variété B est 59 q/ha (ou moins)", ce qui s'écrit "$\mu = 59$ ".

H_1 : "Le rendement moyen de la variété B est supérieur à 59 q/ha", ce qui s'écrit "$\mu > 59$" (test unilatéal).

Variable de décision : $\underline{T} = \dfrac{\overline{X} - 59}{\widehat{S}/\sqrt{6}}$ où $\overline{X}$ et $\widehat{S}$ sont les variables aléatoires qui associent, à chaque échantillon de taille 6, respectivement la moyenne et l'écart-type corrigé du rendement dans l'échantillon.

Sous l'hypothèse H_0, la loi de T est la loi de Student à 5 degrés de liberté car le rendement est distribué normalement dans la population.

Le seuil de signification est $\alpha = 1$ % et $P(T < 3{,}365) \simeq 0{,}99$.

Zone de rejet de H_0 : $[3{,}365\,;+\infty[$. **Zone d'acceptation de H_0 :** $]-\infty\,;3{,}365[$.

Règle de décision :

Si $t_{obs} < 3{,}365$, on accepte H_0 et on admet que le rendement de B est 59 q/ha.

Si $t_{obs} \geq 3{,}365$, on refuse H_0 au profit de H_1 et on admet que le rendement de B est supérieure 59 q/ha..

Mise en œuvre du test : $t_{obs} \simeq 1{,}17$. On accepte H_0. Le rendement de la variété B n'est pas meilleur que celui de A.

Exemple 3

Population : Ensemble des pièces produites.

Caractère : Diamètre(quantitatif)

Il s'agit d'un test sur la moyenne μ des diamètres des pièces mécaniques.

H_0 : "Le diamètre moyen est 21 mm", ce qui s'écrit "$\mu = 21$ mm".

H_1 : "Le diamètre moyen est 21 mm", ce qui s'écrit "$\mu \neq 21$ mm".

Variable de décision : $T = \dfrac{\overline{X} - 21}{\hat{S}/10}$ où $\overline{X}$ et $\hat{S}$ sont les variables aléatoires qui associent, à chaque échantillon de taille 100, respectivement la moyenne et l'écart-type corrigé du diamètre des pièces dans l'échantillon.

Sous l'hypothèse H_0, la loi de T est approchée par la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ car $100 \geq 30$.

Le seuil de signification est $\alpha = 5\ \%$ et $P(|T| < 1{,}96) \simeq 0{,}95$.

Zone de rejet de H_0 : $]-\infty ; -1{,}96] \cup [1{,}96 ; +\infty[$. **Zone d'acceptation de H_0 :** $]-1{,}96 ; 1{,}96[$.

Règle de décision :

Si $|t_{obs}| < 1{,}96$, on accepte H_0 et on admet que la machine est bien réglée.

Si $|t_{obs}| \geq 1{,}96$, on refuse H_0 au profit de H_1 et on admet que la machine doit être réglée.

Mise en œuvre du test : $t_{obs} \simeq 3{,}31$. On refuse H_0. La machine ne semble pas réglée correctement.

Pour le second échantillon de taille $n \geq 30$, $-1{,}96 < \dfrac{21{,}1 - 21}{0{,}54/\sqrt{n-1}} < 1{,}96$, ce qui devient $30 \leq n < 113$.

Exemple 4

Populations : Ensembles des malades fiévreux d'une part et non fiévreux d'autre part.

Caractère : Guérison par le traitement (qualitatif)

Il s'agit d'un test de comparaisons de proportions. Soit p_1 et, respectivement, p_2 les pourcentages de guéris parmi les malades respectivement fiévreux et non-fiévreux.

H_0 : "Les résultats sont les mêmes", ce qui s'écrit "$p_1 = p_2$".

H_1 : "Les résultats ne sont pas les mêmes", ce qui s'écrit "$p_1 \neq p_2$".

Variable de décision : $T = \dfrac{F_1 - F_2}{\sqrt{F(1-F)\left(\frac{1}{200} + \frac{1}{100}\right)}}$ où F_1 et F_2 sont les variables aléatoires qui associent, à chaque couple d'échantillons de tailles respectives 200 et 100, de malades respectivement fiévreux et non-fiévreux, le pourcentage de guéris. On pose $F = \dfrac{2\,F_1 + F_2}{3}$.

On estime p_1 par $\dfrac{2 \times 0{,}72 + 0{,}88}{3} \approx 0{,}773$. Sous l'hypothèse H_0, la loi de T est approchée par la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ car $200 \geq 30$, $100 \geq 30$, $200 \times 0{,}773 \geq 15$ et $200 \times 0{,}773 \times (1 - 0{,}773) \geq 5$.

Le seuil de signification est $\alpha = 5\ \%$ et $P(|T| < 1{,}96) \simeq 0{,}95$.

Zone de rejet de H_0 : $]-\infty ; -1{,}96] \cup [1{,}96 ; +\infty[$. **Zone d'acceptation de H_0 :** $]-1{,}96 ; 1{,}96[$.

Règle de décision :

Si $|t_{obs}| < 1{,}96$, on accepte H_0 et on admet que la fièvre n'influe pas sur l'efficacité du traitement.

Si $|t_{obs}| \geq 1{,}96$, on refuse H_0 au profit de H_1 et on admet que la fièvre influe sur l'efficacité du traitement.

Mise en œuvre du test :

$t_{obs} \simeq -3{,}119$. On refuse H_0. Le traitement n'a pas la même efficacité sur les deux types de malades.

Exemple 5

Population : Ensembles des copies du baccalauréat des académies A et B.

Caractère : Note (quantitatif)

Il s'agit d'un test de comparaisons de variances. Soit σ_A^2 et, respectivement, σ_B^2 les variances des totaux de points dans les académies respectivement A et B.

H_0 : "Les dispersions des résultats sont les mêmes", ce qui s'écrit "$\sigma_A = \sigma_B$".

H_1 : "La dispersion des résultats de l'académie A est supérieure à celle de l'académie B", ce qui s'écrit "$\sigma_A > \sigma_B$".

Variable de décision : $\underline{T} = \dfrac{\widehat{S_A}^2}{\widehat{S_B}^2}$ où $\widehat{S_A}$ et $\widehat{S_B}$ sont les variables aléatoires qui associent, à chaque couple d'échantillons de tailles respectives 25 et 28, d'élèves des académies respectivement A et B, les écarts-types corrigés des résultats.

Sous l'hypothèse H_0, la loi de T est la loi de Snédécor à 24 et 27 degrés de liberté car le caractère est distribué normalement dans les deux populations.

Le seuil de signification est $\alpha = 5\ \%$ et $P(T > 1{,}93) \simeq 0{,}05$.

Zone de rejet de H_0 : $]1{,}93\ ;\ +\infty[$. **Zone d'acceptation de H_0 :** $[0\ ;\ 1{,}93]$.

Règle de décision :

Si $t_{obs} \leq 1{,}93$, on accepte H_0 et on admet que les dispersions des résultats dans les deux académies sont identiques.

Si $t_{obs} > 1{,}93$, on refuse H_0 au profit de H_1 et on admet que la dispersion des résultats dans l'académie A dans les deux académies sont identiques.

Mise en œuvre du test :

$t_{obs} \simeq 1{,}438$. On accepte H_0. Les dispersions des résultats dans les deux académies sont identiques.

Exemple 6

Population : Ensembles des supérieurs hommes et femmes.

Caractère : Salaire (quantitatif)

Testons l'égalité des variances.

Il s'agit d'un test de comparaisons de variances. Soit σ_H^2 et, respectivement, σ_F^2 les variances des salaires respectivement des hommes et des femmes.

H_0 : "Les dispersions des salaires sont les mêmes", ce qui s'écrit "$\sigma_H = \sigma_F$".

H_1 : "Les dispersions des salaires ne sont pas les mêmes", ce qui s'écrit "$\sigma_H \neq \sigma_F$".

Variable de décision : $T = \dfrac{\widehat{S_H}^2 - \widehat{S_F}^2}{\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{\widehat{S_H}^4}{600} + \dfrac{\widehat{S_F}^4}{400}}}$ où $\widehat{S_H}$ et $\widehat{S_F}$ sont les variables aléatoires qui associent, à chaque couple d'échantillons de tailles respectives 600 et 400, de cadres respectivement hommes et femmes, les écarts-types corrigés des salaires.

Sous l'hypothèse H_0, la loi de T est approchée par la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ,\ 1)$ car $600 \geq 30$ et $400 \geq 30$.

Le seuil de signification est $\alpha = 5\ \%$ et $P(|T| < 1{,}96) \simeq 0{,}95$.

Zone de rejet de H_0 : $]-\infty\ ;\ -1{,}96] \cup [1{,}96\ ;\ +\infty[$. **Zone d'acceptation de H_0 :** $]-1{,}96\ ;\ 1{,}96[$.

Règle de décision :

Si $|t_{obs}| < 1{,}96$, on accepte H_0 et on admet que les dispersions des salaires des hommes et des femmes sont identiques.

Si $|t_{obs}| \geq 1{,}96$, on refuse H_0 au profit de H_1 et on admet que les dispersions des salaires des hommes et des femmes sont différentes.

Mise en œuvre du test :

$t_{obs} \simeq -4{,}519$. On refuse H_0. Les variances des salaires sont différentes dans les deux populations.

Testons l'égalité des moyennes.

Il s'agit d'un test de comparaisons de moyennes. Soit μ_H et, respectivement, μ_F les moyennes des salaires respectivement des hommes et des femmes.

H_0 : "Les moyennes des salaires sont les mêmes", ce qui s'écrit "$\mu_H = \mu_F$".

H_1 : "Les moyennes des salaires ne sont pas les mêmes", ce qui s'écrit "$\mu_H \neq \mu_F$".

Variable de décision : $T = \dfrac{\overline{X_H} - \overline{X_F}}{\sqrt{\dfrac{\widehat{S_H}^2}{600} + \dfrac{\widehat{S_F}^2}{400}}}$ où $\overline{X_H}$ et $\overline{X_F}$ sont les variables aléatoires qui associent, à chaque couple d'échantillons de tailles respectives 600 et 400, de cadres respectivement hommes et femmes, les moyennes des salaires.

Sous l'hypothèse H_0, la loi de T est approchée par la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ car $600 \geq 30$ et $400 \geq 30$.

Le seuil de signification est $\alpha = 5\ \%$ et $P(|T| < 1{,}96) \simeq 0{,}95$.

Zone de rejet de H_0 : $]-\infty ; -1{,}96] \cup [1{,}96 ; +\infty[$. **Zone d'acceptation de H_0 :** $]-1{,}96 ; 1{,}96[$.

Règle de décision :

Si $|t_{obs}| < 1{,}96$, on accepte H_0 et on admet que les salaires moyens des hommes et des femmes sont identiques.

Si $|t_{obs}| \geq 1{,}96$, on refuse H_0 au profit de H_1 et on admet que les salaires moyens des hommes et des femmes sont différents.

Mise en œuvre du test :

$t_{obs} \simeq 6{,}69$. On refuse H_0. Les moyennes des salaires sont différentes dans les deux populations.