LES TESTS DE VALIDITE D'HYPOTHÈSE

On se place dans le cas d'échantillons non exhaustifs (avec remise) ou pouvant être considérés comme tels, c'est le cas en particulier si la population mère est d'effectif grand par rapport à la taille de l'échantillon.

Un **test de validité d'hypothèse** est un mécanisme permettant de confirmer ou d'infirmer une **hypothèse** par l'observation d'un échantillon, c'est donc une fonction définie de l'ensemble des échantillons vers l'ensemble des décisions $\{d_0 ; d_1\}$ où d_0 et d_1 sont respectivement l'**acceptation** et le **refus** de l'hypothèse.

Élaboration d'un test

Formulation des hypothèses

On émet deux hypothèses H_0 et H_1 :

- H_0 est l'**hypothèse nulle**, c'est l'hypothèse de travail de l'observateur, il ne rejettera que si elle est vraiment niée par l'expérience. C'est <u>sous cette hypothèse</u> que s'effectuent les calculs de probabilités. C'est en général une égalité portant sur un paramètre de la population (moyenne, variance, proportion) ; elle correspond à :
  - à une hypothèse facile à formuler,
  - à une hypothèse de stabilité,
  - à une hypothèse de prudence, de bon sens.
- H_1 est l'**hypothèse alternative**, c'est une hypothèse que l'on estime a priori peu probable, mais possible ; sa forme dépend du contexte. C'est en général :
  - une non-égalité : le test est alors dit **bilatéral**,
  - une inégalité ou, plus rarement, une égalité : le test est alors dit **unilatéral**.

Quand H_1 n'est pas le contraire de H_0, le test est dit **non-contradictoire**.

Détermination de la variable de décision

C'est une variable aléatoire T dont on exprime la loi sous l'hypothèse H_0, à partir des résultats sur l'échantillonnage. Elle s'exprime à partir de la loi suivie par le paramètre des échantillons.

Seuil de signification

On fixe γ le **seuil de signification** ou **de confiance** du test. γ est une valeur à laquelle doit être inférieure la probabilité α que l'hypothèse H_0 soit rejetée alors qu'elle est vraie. Le choix de γ, en général 0,01 ou 0,05 ou 0,1, est lié à la confiance que l'on accorde à l'hypothèse H_0.

Puis, on détermine la **région d'acceptation** de H_0, c'est un intervalle I_γ, en général de la forme $[a ; b]$ ou $]-\infty ; b]$ ou $[a ; +\infty[$, dépendant de T, de H_0, de H_1 et de γ, de plus faible amplitude et qui vérifie $P[T \in I_\gamma] \geq 1-\gamma$ si H_0 est vraie.

Si H_0 est vraie, $P[T \notin I_\gamma] = \alpha$ est le **risque de première espèce**, c'est le risque de rejeter à tort H_0. $1-\alpha$ est le **niveau de confiance** du test.

La **région critique** ou **région de rejet** de H_0 est le complémentaire de I_γ dans $\mathbb{R}$.

Remarque :

Lorsque la loi de T est continue, γ et α coïncident.

Règle de décision

Sous l'hypothèse H_0, le fait que T prenne des valeurs hors de I_γ est relativement rare. Appelons t_{obs} la valeur prise par T pour l'échantillon observé.

La **règle de décision** est la suivante :

- si $t_{obs} \notin I_\gamma$: on n'admet pas l'effet du hasard dans le choix de l'échantillon et on rejette, dans ce cas, l'hypothèse H_0 ;
- si $t_{obs} \in I_\gamma$: on accepte l'hypothèse H_0.

Remarque :

Si t_{obs} est proche des bornes de I_γ, il est préférable de renouveler le test avec un échantillon de taille supérieure, mais cela entraîne une augmentation du coût du test.

Mise en œuvre du test

On met en place un protocole expérimental pour prélever un échantillon et recueillir les observations de la façon la plus fiable possible. On calcule t_{obs} et on applique la règle de décision.

A propos des risques d'erreur

Naturellement, comme on ne dispose pas de renseignements sur l'ensemble de la population, on risque de se tromper en prenant la décision et il importe de contrôler au maximum tout risque d'erreur.

Si le risque de première espèce est égal au seuil de signification du test, on a le tableau de probabilités suivant :

		Vérité	
		H_0 est vraie	H_0 est fausse
Décision	Acceptation de H_0	$1-\alpha$	β
	Rejet de H_0	α	$1-\beta$

La probabilité β d'accepter H_0 à tort est le **risque d'erreur de seconde espèce**.

β ne peut être calculé qu'en faisant une hypothèse sur la valeur du paramètre. On souhaite que β soit le plus petit possible. La **puissance du test** est $1-\beta$.