CORRIGÉ DES EXERCICES SUR LES LOIS BINOMIALES

Exercice 1

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = k)$	0,002	0,013	0,042	0,087	0,134	0,163	0,165	0,141	0,105

Exercice 2

X est la variable aléatoire donnant le nombre de pièces défectueuses de l'échantillon, X suit la loi binomiale de paramètres 50 et 0,01. $P(A) = P(X = 0) \approx 0{,}605$; $P(B) = P(X = 1) \approx 0{,}306$; $P(C) = P(X \geq 2) \approx 0{,}089$.

Exercice 3

1° a) - Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses fournies par un candidat répondant au hasard. X suit la loi binomiale de paramètres 12 et 0,5.

La probabilité d'embaucher un incompétent est $P(X \geq 9) \approx 0{,}073$.

b) - La probabilité d'embaucher un incompétent est $P(X \geq 10) \approx 0{,}019$.

c) - Soit Y la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses fournies par un candidat répondant au hasard. Y suit la loi binomiale de paramètres 13 et 0,5. Le plus petit nombre de bonnes réponses à exiger pour que la probabilité d'embaucher un incompétent soit inférieure à 0,05 est 10 car $P(Y \leq 10) \leq 0{,}05$ et $P(Y \leq 11) > 0{,}05$.

2°) - Soit Z la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses fournies par le candidat. Z suit la loi binomiale de paramètres 13 et 0,85. $P(Z < 10) \approx 0{,}12$.

Exercice 4

1°) X suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{15}$

2°) $E(X) \approx 0{,}666$.

3°) - Le revenu mensuel moyen qu'il espérer sur une longue période est

$$\left(0{,}666 \times 1\,000 \times \frac{1}{10} - 30\right) \times 25 \approx 915\text{ €}.$$

Exercice 5

1°) - <u>L'expérience aléatoire</u> : choix d'une personne dans la population.

<u>Univers</u> : l'ensemble Ω des personnes de la population.

<u>Probabilité</u> : Équiprobabilité car un élément de l'univers est choisi au hasard.

Le sous-ensemble E de l'univers correspondant à l'événement "la personne est du groupe A ou de Rhésus –" est l'ensemble E des personnes de la population du groupe A ou de Rhésus – (éventuellement du type A^-).

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(A) + \text{card}(-) - \text{card}(A^-)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} + \frac{\text{card}(-)}{\text{card}(\Omega)} - \frac{\text{card}(A^-)}{\text{card}(\Omega)} = 0{,}44 + 0{,}15 - 0{,}066 = 0{,}524.$$

2°) - Expérience aléatoire : Choix de 10 personnes dans la population. Appelons n l'effectif de la population. Au moins trois raisonnements sont possibles :

TIRAGES SANS REMISE

Univers : Ω_1 l'ensemble des combinaisons de 10 personnes de la population (sous-ensembles de 10 éléments).

Probabilité : Équiprobabilité car un élément de l'univers est choisi au hasard.

Card(Ω_1) = $\binom{n}{10} = \dfrac{n \times (n-1) \dots (n-9)}{10!}$

TIRAGES SANS REMISE

Univers : Ω_2 l'ensemble des arrangements de 10 personnes de la population (10-uplets sans répétition)

Probabilité : Équiprobabilité car un élément de l'univers est choisi au hasard.

Card(Ω_2) = $A_n^{10} = n \times (n-1) \dots (n-9)$.

TIRAGES AVEC REMISE

Univers : Ω_3 l'ensemble des 10-uplets (avec répétition éventuelle) de personnes de la population.

Probabilité : Équiprobabilité car un élément de l'univers est choisi au hasard.

Card(Ω_3) = n^{10}.

a) - On considère l'événement F : "toutes les personnes choisies sont du groupe A". Remarquons que le nombre de personnes du groupe A de la population est $0{,}44 \times n$.

Le sous-ensemble F de Ω_1 correspondant à l'événement est l'ensemble des combinaisons de 10 personnes du groupe A.

$$P(F) = \frac{\text{card}(F)}{\text{card}(\Omega_1)} = \frac{\binom{0{,}44\,n}{10}}{\binom{n}{10}}$$

$$P(F) = \frac{\dfrac{0{,}44\,n \times (0{,}44\,n-1) \dots (0{,}44\,n-9)}{10!}}{\dfrac{n \times (n-1) \dots (n-9)}{10!}}$$

Ainsi, $P(F) = \dfrac{0{,}44\,n \times (0{,}44\,n-1) \dots (0{,}44\,n-9)}{n \times (n-1) \dots (n-9)}$

Le sous-ensemble F de Ω_2 correspondant à l'événement est l'ensemble des arrangements de 10 personnes du groupe A.

$$P(F) = \frac{\text{card}(F)}{\text{card}(\Omega_2)} = \frac{A_{0{,}44\,n}^{10}}{A_n^{10}}$$

$$= \frac{0{,}44\,n \times (0{,}44\,n-1) \dots (0{,}44\,n-9)}{n \times (n-1) \dots (n-9)}$$

Le sous-ensemble F de Ω_3 correspondant à l'événement est l'ensemble des 10-uplets (avec répétition éventuelle) de personnes du groupe A.

$$P(F) = \frac{\text{card}(F)}{\text{card}(\Omega_3)} = \frac{(0{,}44 \times n)^{10}}{n^{10}} = 0{,}44^{10} \approx 0{,}00027.$$

Les deux premiers résultats sont égaux, différents du dernier et on ne peut pas les calculer car on ne connaît pas la valeur de n. Lorsque la valeur de n est grande par rapport au nombre d'individus choisis, ici 10, les deux résultats ne diffèrent pas beaucoup.

Pour $n = 1\,000$:

P(F) ≈ 0,00026.

$P(F) = \dfrac{440 \times 439 \times \dots \times 431}{1\,000 \times 999 \times \dots \times 991} \approx 0{,}00026$.

P(F) ≈ 0,00027.

Pour $n = 10\,000$:

P(F) ≈ 0,00027.

$P(F) = \dfrac{4\,400 \times 4\,399 \times \dots \times 4\,391}{10\,000 \times 9\,990 \times \dots \times 9\,991}$

P(F) ≈ 0,00027.

P(F) ≈ 0,00027.

En conclusion, pour faire les calculs on admet que le tirage est fait avec remise lorsque l'effectif de la population est grand par rapport au nombre d'individus choisis.

b) - On considère l'événement G : "deux personnes au moins sont du groupe B". Remarquons que le nombre de personnes du groupe B de la population est $0{,}08 \times n$. L'événement contraire de G, $\overline{G}$ est "une ou zéro personne est du groupe B", c'est la réunion des deux événements incompatibles : $\overline{G}'$ "aucune personne n'est du groupe B" et $\overline{G}''$ "une personne exactement est du groupe B". $P(G) = 1 - P(\overline{G}) = 1 - P(\overline{G}') - P(\overline{G}'')$.

Par un raisonnement analogue au **a)** :

$$P(\overline{G}') = \frac{0{,}92\,n \times (0{,}92\,n-1)\ \dots\ (0{,}92\,n-9)}{n \times (n-1)\ \dots\ (n-9)} = \frac{\binom{0{,}92\,n}{10}}{\binom{n}{10}}.$$

$$P(\overline{G}') = \frac{A_{0{,}92\,n}^{10}}{A_n^{10}} = \frac{0{,}92\ n \times (0{,}92\ n\text{-}1)\ \dots\ (0{,}92\ n\text{-}9)}{n \times (n\text{-}1)\ \dots\ (n\text{-}9)}.$$

$$P(\overline{G}') = 0{,}92^{10} \approx 0{,}43.$$

Calculons $P(\overline{G}'')$:"

Le sous-ensemble $\overline{G}''$ de Ω_1 correspondant à l'événement est l'ensemble des sous-ensembles de 10 personnes comprenant une personne du groupe B et 9 personnes non du groupe B.

$$P(\overline{G}'') = \frac{\text{card}(\overline{G}'')}{\text{card}(\Omega_1)} = \frac{0{,}08\,n \times C_{0{,}92\,n}^{9}}{C_n^{10}}$$

$$P(\overline{G}'') = \frac{\dfrac{0{,}08\,n \times 0{,}92\,n \times (0{,}92\,n-1)\ \dots\ (0{,}92\,n-8)}{9!}}{\dfrac{n \times (n-1)\ \dots\ (n-9)}{10!}}$$

$$P(\overline{G}'') = \frac{10 \times 0{,}08\,n \times 0{,}92\,n \times (0{,}92\,n-1)\ \dots\ (0{,}92\,n-8)}{n \times (n-1)\ \dots\ (n-9)}$$

$$P(G) = 1 - \frac{0{,}92\,n \times (0{,}92\,n-1)\ \dots\ (0{,}92\,n-9)}{n \times (n-1)\ \dots\ (n-9)} - \frac{10 \times 0{,}08\,n \times 0{,}92\,n \times (0{,}92\,n-1)\ \dots\ (0{,}92\,n-8)}{n \times (n-1)\ \dots\ (n-9)}.$$

Le sous-ensemble $\overline{G}''$ de Ω_2 correspondant à l'événement est l'ensemble des 10-uplets à termes distincts de 9 personnes non du groupe B et d'une personne du groupe B.

$$P(\overline{G}'') = \frac{\text{card}(\overline{G}'')}{\text{card}(\Omega_2)} = \frac{10 \times 0{,}08\,n \times A_{0{,}92\,n}^{9}}{A_n^{10}}$$

$$= \frac{10 \times 0{,}08\,n \times 0{,}92\,n \times (0{,}92\,n-1)\ \dots\ (0{,}92\,n-8)}{n \times (n-1)\ \dots\ (n-9)}$$

$$P(G) = 1 - P(\overline{G}') - P(\overline{G}'')$$

$$= 1 - \frac{0{,}92\,n \times (0{,}92\,n-1)\ \dots\ (0{,}92\,n-9)}{n \times (n-1)\ \dots\ (n-9)} - \frac{10 \times 0{,}08\,n \times 0{,}92\,n \times (0{,}92\,n-1)\ \dots\ (0{,}92\,n-8)}{n \times (n-1)\ \dots\ (n-9)}.$$

Le sous-ensemble $\overline{G}''$ de Ω_3 correspondant à l'événement est l'ensemble des 10-uplets (avec répétition éventuelle) de 9 personnes non du groupe B et d'une personne du groupe B.

$$P(\overline{G}'') = \frac{\text{card}(\overline{G}'')}{\text{card}(\Omega_3)}$$

$$= \frac{0{,}08\,n \times (0{,}92\,n)^9 + 0{,}92\,n \times 0{,}08\,n \times (0{,}92\,n)^8 + \dots + (0{,}92\,n)^9 \times 0{,}08\,n}{n^{10}}$$

Les termes de la somme correspondent aux différentes positions que peut prendre la personne du groupe B dans le 10-uplet.

$P(\overline{G}'') = 10 \times 0{,}08 \times (0{,}92)^9 \approx 0{,}38.$

On en déduit que $P(G) \approx 1 - 0{,}43 - 0{,}38 \approx 0{,}19.$

Les deux premiers résultats sont égaux, différents du dernier et on ne peut pas les calculer car on ne connaît pas la valeur de n. Dans la pratique, lorsque la valeur de n est grande par rapport au nombre d'individus choisis, ici 10, les deux résultats ne diffèrent pas beaucoup.

Pour $n = 1\,000$:

$P(G) \approx 0{,}19.$	$P(G) = 1 - 0{,}43 - 0{,}38 \approx 0{,}19.$	$P(G) \approx 0{,}19.$

En conclusion, pour faire les calculs on admet que le tirage est fait avec remise lorsque l'effectif de la population est grand par rapport au nombre d'individus choisis.