LOIS BINOMIALES

$n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$.

Définition

Une variable aléatoire X suit la **loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres n et p où $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$ lorsque sa loi de probabilité est définie par $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour k entier de l'intervalle $[0 ; n]$.

Espérance et variance

Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, l'espérance de X est $E(X) = n\,p$ et sa variance est $V(X) = n\,p\,(1-p)$.

Remarque

Les lois binomiales interviennent dans la modélisation de n réalisations successives et indépendantes d'une expérience aléatoire à exactement deux issues :

- le *succès* avec la probabilité p
- l'*échec* avec la probabilité $1-p$.

La variable aléatoire donnant le nombre de *succès* suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Lorsque n prend de grandes valeurs, les calculs de probabilités sont fastidieux.

par une loi de Poisson

Si p est petit, la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est approchée par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ (conservation de la moyenne). Les conditions d'approximation sont $n \geq 30$, $p \leq 0{,}1$ et $n\,p < 15$.

par une loi normale

Si p n'est ni trop voisin de 0, ni trop voisin de 1, la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est approchée par la loi normale de paramètres np et $\sqrt{np\,(1-p)}$ (conservation de la moyenne et de la variance). Les conditions d'approximation sont : $n \geq 30$, $np \geq 15$ et $np\,(1-p) > 5$.

Exercices

Exercice 1

Dans une entreprise, une étude statistique a montré qu'en moyenne 5 % des articles d'une chaîne de fabrication présentent des défauts. Lors d'un contrôle de qualité, on envisage de prélever un échantillon de 120 articles. Bien que ce prélèvement soit exhaustif (sans remise), on considère que la production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler cette épreuve à un tirage avec remise, et que la probabilité qu'un article prélevé soit défectueux est constante. La variable aléatoire X donnant le nombre d'articles défectueux d'un tel échantillon suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}(120 ; 0{,}05)$. Calculer les probabilités $P(X = k)$ pour k entier naturel inférieur à 8.

Exercice 2

À la livraison d'un nombre très important de pièces dont 1 % sont défectueuses, on prélève au hasard un échantillon de 50 pièces. Déterminer la probabilité des événements suivants :

1°) - A : "l'échantillon ne comporte aucune pièce défectueuse" ;

2°) - B : "l'échantillon comporte une seule pièce défectueuse" ;

3°) - C : "l'échantillon comporte au moins deux pièces défectueuses".

Exercice 3

Pour embaucher un graphologue, le chef du personnel d'une grosse entreprise envisage un test. Il propose 12 paires d'écritures constituées de l'écriture d'un médecin et de celle d'un avocat ; le candidat sera embauché s'il identifie, pour au moins 9 paires, l'écriture du médecin et celle de l'avocat.

1° a) - Déterminer la probabilité d'embaucher un incompétent en supposant que c'est un candidat qui répond au hasard, ce qui peut signifier que la probabilité qu'il reconnaisse une paire d'écritures donnée est 0,5.

b) - Pensant que cette probabilité est trop forte, le chef du personnel pense exiger 10 bonnes réponses. Déterminer la probabilité d'embaucher un incompétent.

c) - Pensant que les conditions d'embauche deviennent trop exigeantes, le chef du personnel envisage de proposer 13 paires d'écritures, déterminer le plus petit nombre de bonnes réponses à exiger pour que la probabilité d'embaucher un incompétent soit inférieure à 0,05.

2°) - Plaçons-nous maintenant du point de vue d'un candidat qui estime à 85 % la probabilité qu'il reconnaisse une paire d'écritures donnée. Déterminer la probabilité qu'il fournisse moins de 10 bonnes réponses sur 13.

Exercice 4

Un démarcheur propose des encyclopédies à domicile. Il visite 10 clients par jour et on admet que la probabilité qu'un client passe commande est $\frac{1}{15}$.

1°) - Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'encyclopédies vendues en un jour. Quelle est la loi de X ?

2°) - Quelle est l'espérance mathématique de X ?

3°) - Une encyclopédie coûte 1 000 € ; le démarcheur reçoit une commission de 10 % sur les commandes obtenues et ses frais journaliers s'élèvent à 30 €. Sachant qu'il travaille 25 jours par mois, quel revenu mensuel moyen peut-il espérer sur une longue période ?

Exercice 5

Les types de sang humain sont caractérisés d'une part par un groupe représenté par l'un des quatre symboles O, A, B ou AB, et d'autre part par le facteur Rhésus + ou –. Le groupe et le facteur Rhésus sont indépendants et leur répartition dans la population est la suivante :

groupes :	O : 44 %	A : 44 %	B : 8 %	AB : 4 %
Rhésus	+ : 85 %	– : 15 %.		

1°) - On choisit une personne au hasard dans la population, déterminer la probabilité qu'elle soit du groupe A ou du Rhésus –.

2°) - On choisit 10 personnes au hasard dans la population, calculer les probabilités que :

a) - toutes les personnes soient du groupe A, **b) -** deux personnes au moins soient du groupe B.
