LOIS DE POISSON

Définition

Une variable aléatoire X suit la **loi de Poisson** $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ, réel strictement positif, lorsque sa loi de probabilité est définie par $\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^k}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Espérance et variance

L'espérance de X est $\mathrm{E}(X) = \lambda$ et sa variance est $\mathrm{V}(X) = \lambda$, ainsi son écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

Propriétés

Les lois de Poisson interviennent dans la modélisation de phénomènes aléatoires où le futur est indépendant du passé (pannes de machines, sinistres, appels téléphoniques à un standard, files d'attente, mortalité, temps de guérison de petites blessures, stocks, nombre d'étoiles filantes dans le ciel d'été...)

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Lorsque n prend de grandes valeurs, et que p est petit, la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,,p)$ est approchée par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ (conservation de la moyenne). Les conditions d'approximation sont $n \geq 30$, $p \leq 0{,}1$ et $n\,p < 15$.

Exercices

Exercice 1

Dans une entreprise, une étude statistique a montré qu'en moyenne 5 % des articles d'une chaîne de fabrication présentent des défauts. Lors d'un contrôle de qualité, on envisage de prélever un échantillon de 120 articles. Bien que ce prélèvement soit exhaustif (sans remise), on considère que la production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler cette épreuve à un tirage avec remise et que la probabilité qu'un article prélevé soit défectueux est constante.

1. - Justifier que la loi de la variable aléatoire X donnant le nombre d'articles défectueux d'un tel échantillon peut être approchée par la loi de Poisson de paramètre 6.

2. - Évaluer les probabilités $\mathrm{P}(X = k)$ pour k entier naturel inférieur à 8.

Exercice 2

La variable aléatoire X donnant le nombre de clients se présentant au guichet *Affranchissements* d'un bureau de poste par intervalle de temps de durée 10 minutes, entre 14 h 30 et 16 h 30, suit la loi de Poisson de paramètre 5.

Calculer la probabilité que, sur une période de 10 minutes choisie au hasard entre 14 h 30 et 16 h 30 un jour d'ouverture du guichet, il y ait au moins 8 personnes à se présenter à ce guichet.

Exercice 3

3 % des bouteilles d'eau livrées par une usine sont défectueuses. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 bouteilles prises au hasard, associe le nombre de bouteilles défectueuses. On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre 3. Trouver la probabilité de chacun des événements suivants :

1°) - "Sur un lot de 100 bouteilles choisies au hasard, il n'y a aucune bouteille défectueuse."

2°) - "Sur un lot de 100 bouteilles choisies au hasard, il y a 2 bouteilles défectueuses."

3°) - "Sur un lot de 100 bouteilles choisies au hasard, il y a 3 bouteilles défectueuses."

4°) - "Sur un lot de 100 bouteilles choisies au hasard, il y a moins de 4 bouteilles défectueuses."

Exercice 4

Dans un grand magasin, la variable aléatoire X dénombrant le nombre de magnétoscopes vendus au cours d'une journée quelconque, suit la loi de Poisson de paramètre 4.

Les ventes pendant deux journées sont supposées indépendantes.

1°) - On choisit une journée au hasard, calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

a) - "La vente de la journée est au plus égale à 5."

b) - "La vente de la journée est au plus égale à 2 ou au moins égale à 6."

2°) - On choisit deux jours consécutifs au hasard.

a) - Calculer la probabilité que les ventes de chacune des deux journées soit au moins égale à 5.

b) - Calculer la probabilité que la somme des ventes de deux jours consécutifs soit égale à 2.

Exercice 5

Un chef d'entreprise, pour éviter l'attente des camions venant livrer, envisage si cela s'avère nécessaire, de construire de nouveaux postes de déchargement. Il y en a actuellement cinq. On considère pour simplifier l'étude, qu'il faut une journée pour décharger un camion. Une enquête préalable sur 120 jours a donné les résultats suivants :

Nombre d'arrivées par jours (x_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de jours (n_i)	2	10	18	22	23	19	12	7	4	2	1

I - Calculer la moyenne, la variance et l'écart type de cette série statistique.

II - La v. a. r. X mesurant le nombre quotidien de camions venant livrer, suit la loi de Poisson de paramètre 4.

1°) - Justifier cette loi.

2° a) - Quel est le nombre maximal d'arrivées de camions n'entraînant pas d'attente ?

b) - En déduire la probabilité de n'avoir aucun camion en attente.

3°) - Combien faudrait-il de postes de déchargement pour que la probabilité de n'avoir aucun camion en attente soit supérieure à 0,95 ?

4°) - On prévoit, pour les années à venir, un doublement de la fréquence des livraisons. Combien faudra-t-il de postes de déchargement pour que la probabilité de n'avoir aucun camion en attente soit supérieure à 0,95 ?

Pourquoi une loi de Poisson ? un exemple

On suppose qu'il apparaît en moyenne deux étoiles filantes toutes les cinq minutes dans le ciel d'une nuit de la première semaine d'août.

On choisit au hasard un intervalle de 5 minutes. Soit X la variable aléatoire associant à l'intervalle de 5 minutes choisi, le nombres d'étoiles filantes observées. Déterminons la loi de probabilité de X.

Dans un premier temps, discrétisons le problème :

On partage les cinq minutes en n intervalles de temps *suffisamment petits* pour contenir au plus une apparition d'étoiles filantes.

- On fait l'hypothèse que la probabilité d'apparition d'une étoile filante durant de petits intervalles de temps est proportionnelle à leur durée.
- On suppose de plus que les apparitions des étoiles sont des événements indépendants.

La probabilité d'une apparition durant un de ces n intervalles est $\dfrac{\text{nombre moyen d'apparitions en 5 min}}{\text{nombre d'intervalles en 5 min}} = \dfrac{2}{n}$.

Dans une première approximation, le nombre d'apparitions d'étoiles filantes en cinq minutes suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n\,;\dfrac{2}{n}\right)$.

$$P_n(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{2}{n}\right)^k\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-k} = \frac{n\,(n-1)\,...\,(n-k+1)}{k!}\left(\frac{2}{n}\right)^k\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-k} = \frac{2^k}{k!}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-k}\frac{n\,(n-1)\,...\,(n-k+1)}{n^k}$$

$$P_n(X = k) = \frac{2^k}{k!}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-k}\prod_{i=1}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)$$

Examinons les limites de chacun des facteurs du produit obtenu lorsque n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire lorsque la durée des n intervalles tend vers 0 :

- $\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n-k} = \exp\left((n-k)\ln\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\right) = \exp\left(\left(2-\dfrac{2k}{n}\right)\dfrac{\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}\right)$.

  Lorsque n tend vers $+\infty$, $\dfrac{2}{n}$ tend vers 0, alors $\left(2-\dfrac{2k}{n}\right)$ tend vers 2 et $\dfrac{\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}$ tend vers -1.

  On en déduit que $\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n-k}$ tend vers e^{-2}.

- Lorsque n tend vers $+\infty$, $\displaystyle\prod_{i=1}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)$ tend vers 1.

Ainsi $P_n(X = k)$ tend vers $\dfrac{2^k}{k!}e^{-2}$ quand n tend vers $+\infty$.

La loi du nombre d'apparitions d'étoiles filantes en cinq minutes est la loi de Poisson de paramètre 2.