LOIS DISCRÈTES PRÉSENTÉES PAR DES MODÈLES D'URNE

Une urne contient N boules, de c couleurs, dont M blanches, on pose $p = \frac{M}{N}$.

Pour $1 \leq i \leq c$, on appelle M_i le nombre de boules de couleur i et on pose $p_i = \frac{M_i}{N}$.

On effectue un ou plusieurs tirages d'une boule dans l'urne. n est le nombre de tirages.

				Expérience	Variable aléatoire X	Loi de X	Valeurs possibles de X	Probabilités des valeurs de X	Espérance de X	Variance de X
$c = 2$	avec remise	n fixé	$n = 1$	On effectue un seul tirage.	Nombre de boules blanches obtenues	**Bernoulli** $\mathcal{B}(1\,,p)$	$\{0\,;1\}$	$P(X=0) = q$ et $P(X=1) = p$	p	pq
			$n \geq 1$	On effectue n tirages avec remise.	Nombre de boules blanches obtenues	**Binomiale** $\mathcal{B}(n\,,p)$	$\{0\,;1\,;\ldots\,;n\}$	$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	npq
		n variable		On effectue des tirages avec remise.	nombre de tirages pour obtenir la première boule blanche	**Géométrique** $\mathcal{G}(p)$ ou $\mathcal{R}(1\,,p)$	$\mathbb{N}^*$	$P(X=k) = p\,q^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
			$r \geq 1$	On effectue des tirages avec remise.	nombre de tirages nécessaires pour obtenir la r-ième boule blanche	**Pascal** $\mathcal{R}(r\,,p)$	$\{k \in \mathbb{N}\,;k \geq r\}$	$P(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$
			$r \geq 1$	On effectue des tirages avec remise.	nombre de tirages de boules non blanches avant d'obtenir la r-ième boule blanche	**Binomiale négative** $\mathcal{I}(r\,,p)$	$\mathbb{N}$	$P(X=k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r q^k$	$\frac{rq}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$
	sans remise	n fixé	$n \geq 1$	On effectue n tirages sans remise.	nombre de boules blanches obtenues	**Hypergéométrique** $\mathcal{H}(N\,,n\,,p)$	$[\max(0; n-N+M)\,;\min(n;M)]$	$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k} \times \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$npq\,\frac{N-n}{N-1}$
		n variable	$M = 1$	On effectue des tirages sans remise.	nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule blanche	**Uniforme** $\mathcal{U}(N)$ ou $\mathcal{S}(N\,,1\,,p)$	$\{1\,;\ldots\,;N\}$	$P(X=k) = \frac{1}{N}$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$
			$M \geq 1$ $1 \leq r \leq M$	On effectue des tirages sans remise.	nombre de tirages pour obtenir la r-ième boule blanche	**Pascal sans remise** $\mathcal{S}(N\,,r\,,p)$	$\{k \in \mathbb{N}\,;r \leq k \leq N-M+r\}$	$P(X=k) =$ $\frac{\binom{M}{r-1} \times \binom{N-M}{k-r}}{\binom{N}{k-1}} \times \frac{M-r+1}{N-k+1}$	$r\,\frac{N+1}{M+1}$	$rq\,\frac{N\,(N+1)\,(M-r+1)}{(M+1)^2(M+2)}$
$c > 2$	avec remise	n fixé		On effectue n tirages avec remise.	$X = (X_1, X_2, \ldots, X_c)$ où X_i est la variable aléatoire "nombre de boules de couleur i obtenues"	**Multinomiale** $\mathcal{M}(n\,,p_1\,,\ldots\,,p_c)$	ensemble des n-uplets $(k_1, k_2, \ldots, k_c)$ tels que $0 \leq k_i \leq M_i$ et $\sum_{i=1}^{c} k_i = n$.	$P[(X_1, \ldots, X_c) = (k_1, \ldots, k_c)] =$ $\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,\ldots\,k_c!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_c^{k_c}$	$n\,(p_1, p_2, \ldots, p_c)$	$\mathrm{cov}(X_i, X_j) =$ $\delta_{ij}\,np_i - np_ip_j$
	sans remise	n variable $n \leq N$		On effectue n tirages sans remise.	$X = (X_1, X_2, \ldots, X_c)$ où X_i est la variable aléatoire "nombre de boules de couleur i obtenues"	**Multihypergéométrique** $\mathcal{MH}(N\,,n\,,p_1\,,\ldots\,,p_c)$	ensemble des n-uplets $(k_1, k_2, \ldots, k_c)$ tels que $0 \leq k_i \leq M_i$ et $\sum_{i=1}^{c} k_i = n$.	$P[(X_1, \ldots, X_c) = (k_1, \ldots, k_c)] =$ $\frac{\binom{M_1}{k_1} \times \binom{M_2}{k_2} \times \ldots \times \binom{M_C}{k_C}}{\binom{N}{n}}$	$n\,(p_1, p_2, \ldots, p_c)$	$\mathrm{cov}(X_i, X_j) =$ $\frac{n\,(N-n)}{N^2(N-1)} \times M_i\,(N\delta_{ij} - M_j)$

δ_{ij} est le symbole de Kronecker, il vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon